tanulmányok 122/1981

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

A kiadásért felelős:
DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 119 6

ISSN 0324 2951

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

SZTOCHASZTIKUS LJAPUNOV MÓDSZEREK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Irta:

ANDÓ GYÖRGYI
LIPCSEY ZSOLT

122/1981.

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETŐ

Tanulmányunkban sztochasztikus szürési és irányitási algoritmusok konvergenciájának bizonyitási módszereivel foglalkozunk. Az első részben összefoglaljuk a Ljapunov módszereket, melyek e problémák kezeléséhez az irodalomban található leghatékonyabb eszközt jelentik. A második részben ezek alkalmazásaként konkrét algoritmusokat és közelitő eljárásokat vizsgálunk.

A tanulmány elsősorban az emlitett algoritmusokat felhasználó, nem matematikus végzettségü szakemberek /mérnökök/ számára készült. Az olvasóról feltételezzük Prékopa András: Valószinüségszámitás cimü könyvének, szürés-irányitás témaköréből pedig Aström: Introduction to stochastic control cimü müvének ismeretét. Mivel a téma a sztochasztikus folyamatok elméletének egyik legkifinomulabb fejezete, ezért azokat a fogalmakat, tételeket, melyeket felhasználunk, részben a bevezetőben részben pedig a függelékben összefoglaltuk, magyarázó jelleggel, bizonyitások nélkül. A sztochasztikus folyamatok mélyebb fejezeteiben járatlan olvasó számára először a bevezető majd a függelék elolvasását ajánljuk, és csupán ezután a stabilitási fejezeteket. A téma feldolgozása matematikusok részére is hasznos lehet, mert áttekintést nyújt a sztochasztikus stabilitás témaköréről és alkalmazásairól. A tételeket, bizonyitásokat matematikailag preciz formában irtuk le. Alkalmazók számára különösen a II. rész fontos.

Bevezetőnk további részében a tárgyalt módszer alapgondolatát irjuk le röviden és egyúttal rámutatunk a matematikai megfogalmazás legalapvetőbb eszközére.

ELŐSZÓ A SZTOCHASZTIKUS LJAPUNOV MÓDSZERRŐL

A sztochasztikus Lajpunov módszer megértéséhez induljunk ki a determinisztikus Ljapunov módszerből.

Tegyük fel, hogy az $f: R^n \to R^n$, $f(0)=0$ lokális Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő függvénnyel felirt

$$\dot{x} = f(x) \qquad /0.1/$$

differenciálegyenlethez megadható a $0 \in R^n$ körül egy olyan $K_0 \subset R^n$ korlátos zárt környezet, hogy tetszőleges $y \in K_0$ esetén a /0.1/ egyenletre vonatkozó $x(0) = y$ kezdetiérték-feladat $\varphi_y(t)$ megoldása teljesiti a

$$\varphi_y(t) \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty \qquad /0.2/$$

feltételt. A /0.1/ egyenlet $\varphi_0(t) \equiv 0$ megoldását aszimptotikusan stabilnak nevezzük /0.2/ teljesülése esetén. Ha f a t -től is függ, akkor az aszimptotikus stabilitás fogalmához /0.2/ mellett a

$$K := \{\varphi_x(t) \mid (x,t) \in K_0 \times [0,\infty)\} = \bigcup_{t \geq 0} \{\varphi_x(t) \mid x \in K_0\} \qquad /0.3/$$

halmaz korlátosságát is megköveteljük. Ez utóbbi a /0.1/ és /0.2/ teljesüléséből következik, nevezetesen belátható, hogy a /0.3/-ban szereplő K korlátos és zárt, és a $t \geq 0$, $K_t := \{\varphi_x(t) \mid x \in K\}$ halmazcsalád teljesiti az alábbi feltételeket:

1/ $K_t \subset K_{t'}$, $t \geq t'$

2/ $\bigcap_{t \geq 0} K_t = \{0\}$

Képezhetjük e halmazcsalád segitségével a

$$V(x) := \inf\left\{\frac{1}{1+t} \,\middle|\, x \in K_t\right\}$$
$$V \quad K \to \mathbb{R}^+ \qquad /0.4/$$

folytonos függvényt, melyre teljesülnek az

a/ $V \geq 0, \quad V(x) = 0 \iff x = 0,$

b/ $x \in K$ esetén $V(\varphi_x(t)) \searrow 0$ szigorúan monotonan.

Könnyen meggondolható, hogy ha a /0.1/ egyenlethez meg tudunk adni egy a/ és b/ tulajdonságokkal rendelkező V függvényt, akkor a /0.1/ egyenlet 0 megoldása aszimptotikusan stabil, és a V függvény $\left\{\frac{1}{1+t}\right\}_{t\geq 0}$ nivóhalmazai rendelkeznek az 1/, 2/ tulajdonsággal, azaz a

$$K_t := \left\{x \mid V(x) \leq \frac{1}{1+t}\right\}, \quad t \geq 0 \qquad /0.5/$$

halmazcsalád teljesiti 1/ és 2/-t.

A determinisztikus Ljapunov módszer leglényegesebb észrevétele egy olyan $\{K_t\}_{t\geq 0}$ kompakt halmazokból álló halmazcsalád illetve egy $V \geq 0$ függvény megadásában áll, melyek teljesitik az 1/, ill. a b/ feltételeket. Az 1/ feltétel a későbbiek szempontjából fontos alábbi formába is átirható:

$$\varphi_x(t) \in K_t \implies \varphi_x(t') \in K_{t'}, \quad \forall t' \geq t \qquad /0.6/$$

A /0.6/ tulajdonság sztochasztikus átfogalmazásához olyan valószinüségelméleti eszközökre lesz szükségünk, melyek az idézett irodalmakban nem találhatók meg, vagy ottani tárgyalásmódjuk nem éri el a számunkra szükséges mélységet. Ezért a Ljapunov módszer átfogalmazásával párhuzamosan e fogalmakat szemléletesen összefoglaljuk, és precizen definiáljuk.

A valószinüségelmélet - mint ez ismeretes - olyan rendszerek - kisérletek - matematikai modelljéül szolgál, melyekre vonatkozó mérések, kisérletek eredményei a rendelkezésünkre álló információk alapján

A/ nem jósolhatók meg előre, de

B/ információink lehetővé teszik az összes lehetséges kimenetel felsorolását /ezek halmazát Ω -val jelöljük/ és

D/ az eredmények rendszerünk, kisérletünk szempontjából fontos tulajdonságainak felsorolását /e halmazt T-vel jelöljük/.

Ha a mérési eredmények maguk nem is jósolhatók, azok D-beli tulajdonságaira rendelkezünk előzetes információval az alábbi értelemben:

E/ minden D/-beli tulajdonsághoz tartozik egy 0 és 1 közötti szám, mely megmutatja, hogy egy adott kimenetelre a szóbanforgó tulajdonság teljesülése milyen mértékben valószinü és mint a tulajdonságok függvénye, rendelkezik a később felsorolandó, és különben jól ismert tulajdonságokkal.

Például tegyük fel, hogy rendszerünk mérési eredményei valós számok. /Ilyenre vezethet áramerősség, feszültség, nyomás stb. megfigyelése./

A valós számok fontos tulajdonságainak T halmazát nagyságuk segitségével adjuk meg:

Legyenek $a, b \in R$ valós számok.

Ezekkel képezhetjük ξ mérési eredmény

$$\{\xi \leq a\}, \{\xi \geq a\}, \{\xi < b\}, \{\xi \geq b\} \qquad /0.7/$$

tulajdonságait. Fontos egy fenti tulajdonság ellentéte is /azaz, hogy a mérés eredménye nem teljesiti a kivánt feltételt/:

$$-\{\xi \leq a\} = \{\xi > a\}, -\{\xi \leq b\} = \{\xi > b\}, \ldots \qquad /0.8/$$

A fenti /0.7/, /0.8/ tulajdonságok logikai "és" illetve "vagy" jelekkel való összekapcsolása további tulajdonságokat eredményez:

$$\begin{aligned} &\{\xi \leq a\} \wedge \{\xi \geq b\} = \{b \leq \xi \leq a\} = \{\xi \in [b, a]\} \\ &\{\xi \leq a\} \vee \{\xi \geq b\} = \{\xi \in (-\infty, a] \cup [b, \infty)\} \end{aligned} \qquad /0.9/$$

Tulajdonságokat nyerünk akkor is, ha $t_1, t_2 \in T$ egy-egy tulajdonság, és ezeket a logikai "és" "vagy" illetve negálás jelével összekapcsoljuk:

$$t_1 \wedge t_2 \in T, \; t_1 \vee t_2 \in T, \; -t_i \in T, \; i = 1, 2 \qquad /0.10/$$

A /0.9/ jobb oldalát tekintetbe véve minden egyes /0.10/-ben nyert tulajdonságot egyértelmüen megkaphatunk a számegyenes intervallumaiból véges számú halmazmüvelet útján nyerhető halmazzal. Ha $\mathcal{R}$ -rel jelöljük e halmazok rendszerét, akkor a T tulajdonságok halmaza és $\mathcal{R}$ között kölcsönösen egyértelmü és az alábbi értelemben müvelettartó leképezést kapunk:

$$t_A \in T \longleftrightarrow A \in \mathcal{R} \qquad /0.11/$$

amely következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1/ $t_{A_1}, t_{A_2} \in T$ esetén $t_{A_1} \wedge t_{A_2} \to A_1 \cap A_2 \in \mathcal{R}$.

2/ $t_{A_1}, t_{A_2} \in T$ esetén $t_{A_1} \vee t_{A_2} \to A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}$.

3/ $t_A \in T$ esetén $-t_A \to R \setminus A \in \mathcal{R}$

4/ $0, I \in T$ esetén $A_I = R$, $A_0 = \phi \in \mathcal{R}$.

A logikai egység és üres tulajdonság hozzátartozik T-hez /az egyiket minden valós szám, a másikat egyik sem teljesiti/. A T halmaz a fenti müveletekkel Boole algebrát alkot, mig az $\mathcal{R}$ halmazalgebrát, és ezek között a /0.11/ hozzárendelés izomorfizmus.

A D/-ben megadott tulajdonságok rendszerétől megköveteljük, hogy ezek a logikai müveletekre nézve zártak legyenek, azaz Boole algebrát alkossanak.

Elemi eseményeknek a lehetséges kimenetelek halmazának elemeit nevezzük.

Eseménynek adott D/-beli tulajdonsága elemi esemény bekövetkezését nevezzük.

Ez a megfogalmazás lehetővé teszi az elemi események Ω halmazának részhalmazaiból álló esemény halmazalgebra - eseményalgebra - megadását úgy, hogy minden $t \in T$ tulajdonsághoz hozzárendeljük a t tulajdonsággal rendelkező Ω -beli elemi események $\hat{t}$ halmazát. Könnyen belátható, hogy:

1/ $t_1, t_2 \in T$ esetén $\widehat{t_1 \wedge t_2} = \hat{t}_1 \cap \hat{t}_2$

2/ $t_1, t_2 \in T$ esetén $\widehat{t_1 \vee t_2} = \hat{t}_1 \cup \hat{t}_2$

3/ $t \in T$ esetén $\widehat{-t} = \Omega \setminus \hat{t}$

4/ $0, I \in T$ esetén $\hat{I} = \Omega$, $\hat{0} = \phi$.

Eddig tehát azt láttuk, hogy egy valószinüségi eseménytér egy $\{\Omega, \mathcal{S}\}$ párból áll, ahol Ω az elemi események halmaza, $\mathcal{S}$ pedig az Ω részhalmazaiból álló eseményalgebra. /Láttuk, hogy az eseményeket jelentő részhalmazok rendszere hasonló tulajdonságú, mint a Boole algebrák, tehát halmaz-Boole algebra. Ezért nevezzük ezt az esemény-Boole algebrát eseményalgebrának./

Az E/ szerint minden $A \in \mathcal{S}$ eseményhez - azaz adott tulajdonságú elemi esemény bekövetkezéséhez - tartozik egy $0 \le P(A) \le 1$ szám, melyet az esemény valószinüségének nevezünk, ha teljesiti az alábbi feltételeket:

1/ $A, B \in \mathcal{S}$, $A \cap B = \emptyset$ mellett

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2/ $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Az eseménytérre és a valószinüségre pusztán matematikai szempontból célszerü az alábbi megszoritásokat tenni:

1/ Az $\mathcal{S}$ halmazalgebrából a megszámlálható egyesités ne vezessen ki, azaz

$$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}. \qquad /0.12/$$

Az olyan <u>halmazalgebrát</u>, melyre ez is teljesül, <u>σ- algebrának</u> nevezzük.

2/ A P valószinüség teljesitse az $\mathcal{S}$ -on az alábbi folytonossági feltételt, nevezetesen $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ esetén a

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 0. \qquad /0.13/$$

E két megszoritással leszükitjük modelljeinket praktikus szempontból kezelhetőbb, "jó" modellekre.

Valószinüségi modellen ezután egy $\{\Omega, \mathcal{S}, P\}$ hármas megadását értjük, ahol $\mathcal{S}$ az Ω halmaz részhalmazaiból álló σ -algebra, P pedig $\mathcal{S}$ -en értelmezett /0.13/-t teljesitő valószinüség - az ilyeneket valószinüségi mértékeknek nevezzük. Az $\{\Omega, \mathcal{S}, P\}$ pedig valószinüségi mértéktér.

Térjünk most vissza a valós számokra vezető mérések leirásához.

Ha az eseményektől megköveteljük a /0.12/ teljesülését, célszerü ezt a valós számok tulajdonságait generáló $\mathcal{R}$ -beli részhalmazosztálytól is megkövetelnünk. Pontosan: legyen $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ az a legszükebb σ -algebra, amely tartalmazza az $\mathcal{R}$ halmazalgebrát. $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ -et a számegyenes Borel halmazainak nevezzük.

A legszükebb σ -algebra fogalmával kapcsolatban nézzük meg az alábbi példát:

Legyenek

$$f_1 = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad \text{és}$$

$$f_2 = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \leq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Legyen $\mathcal{A}_{f_1}$ az a halmazrendszer, amelyet az intervallumok véges egyesitéseiből álló halmazalgebra elemeinek f_1 -el képezett őseképei határoznak meg. Az $\mathcal{A}_{f_2}$ ugyanez f_2 -vel.

Könnyen látható, hogy e két halmazalgebra közös elemei az Φ, $(-\infty,\infty)$, $(0,\infty)$ és a $(-\infty,0)$ halmazok lesznek.

Azt is könnyü végiggondolni, hogy a $[0,\infty)$ összes részhalmazainak halmaza, a $[-\infty,0)$ és $(-\infty,\infty)$ halmazokkal együtt olyan $\mathcal{S}^1_{f_1}$ σ-algebrát alkot, melynek elemei magukba foglalják $\mathcal{A}_{f_1}$-et, azaz $\mathcal{A}_{f_1} \subset \mathcal{S}^1_{f_1}$. Hasonlóan képezhetjük az $\mathcal{S}^1_{f_2}$-t is, melyre $\mathcal{A}_{f_2} \subset \mathcal{S}^1_{f_2}$ áll fenn. Ha pedig vesszük az $\mathcal{R}$ összes részhalmazainak halmazát, ez olyan $\mathcal{S}$ σ-algebra, amely nyilvánvalóan teljesiti az $\mathcal{A}_{f_1} \subset \mathcal{S}^1_{f_1} \subset \mathcal{S}$ illetve $\mathcal{A}_{f_2} \subset \mathcal{S}^1_{f_2} \subset \mathcal{S}$ relációkat. Másrészt $\mathcal{S}$ nyilván tartalmaz sok olyan halmazt /pl. $\mathcal{A}_{f_2}$ elemeit/, melyeket az f_1 függvényen keresztül nem tudunk megfigyelni. Ezért célszerü a $\sigma(f_1)$-et úgy definiálni, hogy vesszük az összes olyan $\mathcal{S}$ halmaz- σ-algebrát, melyek $\mathcal{A}_{f_1}$-et tartalmazzák, és $\sigma(f_1) = \bigcap\limits_{\mathcal{S} \supset \mathcal{A}_{f_1}} \mathcal{S}$. A metszetre is igaz lesz, hogy $\mathcal{A}_{f_1} \subset \sigma(f_1)$, könnyen látható, hogy σ-algebra lesz, továbbá ha $\mathcal{S}$ olyan σ-algebra, hogy $\mathcal{A}_{f_1} \subset \mathcal{S}$, akkor $\sigma(f_1) \subset \mathcal{S}$ is következik, tehát tényleg legszükebb.

Most pedig rátérünk a valószinüség fogalmára.

A fenti $T \ni t \to \hat{t} \in \mathcal{S}$ és $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}) \to t_A \in T$ kölcsönösen egyértelmü müvelettartó leképezéseket tekintetbe véve azt mondhatjuk, hogy a valós számokat eredményező kisérleteket egy $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \to \mathcal{S}$ halmazmüvelettartó leképezés segitségével modellezhetjük. Ha ez a halmazmüvelettartó leképezés egy $\Omega \xrightarrow{\xi} \mathcal{R}$ függvény segitségével

$$A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}) \to \{\omega \mid \xi(\omega) \in A\} \in \mathcal{S} \qquad /0.14/$$

formában megadható, akkor a leképezést generáló egyértelmüen meghatározott ξ függvényt valószinüségi változónak nevezzük. A /0.14/ leképezés - müvelettartó lévén - kijelöl $\mathcal{A}$ -ben egy rész σ-algebrát, amelyet a ξ valószinüségi változó által generált legszükebb σ-algebrának nevezünk és $\sigma(\xi)$-vel jelölünk. /A /0.14/-beli $\{\omega \mid \xi(\omega) \in A\}$ jelölést a továbbiakban röviditve $\{\xi \in A\}$ alakban is használjuk./

Bizonyos valószinüségi változóknak definiáljuk a várható értékét az alábbiak szerint:

1/ $\xi \geq 0$, akkor

$$E(\xi) = \lim_{i \to \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{2^i} P\left(\frac{j}{2^i} \leq \xi < \frac{j+1}{2^i}\right) \qquad /0.15/$$

/Megjegyezzük, hogy ha létezik a limesz az a felosztástól független./

2/ Ha ξ tetszőleges, akkor képezhetjük a $\xi^+(\omega) = \max(\xi(\omega), 0)$ és $\xi^-(\omega) = \max(-\xi(\omega), 0)$ valószinüségi változókat /belátható, hogy ha ξ teljesiti a /0.14/ feltételt, akkor ez fennáll ξ^+ és ξ^- -ra is/. Ha a /0.15/-tel definiált $E(\xi^+)$ és $E(\xi^-)$ közül legalább az egyik véges, akkor a ξ -nek van várható értéke, és ez

$$E(\xi) = E(\xi^+) - E(\xi^-) \qquad /0.16/$$

Véges a várható érték, ha mind $E(\xi^+)$ és $E(\xi^-)$ végesek.

A /0.15/ definicióban szereplő $\left\{\left\{\frac{j}{2^i} \leq \xi < \frac{j+1}{2^i}\right\}\right\}_{j=0}^{\infty}$ események Ω -nak egy felbontását adják, és igy a limeszjel mögötti összeg egy integrálközelitő összegnek tekinthető. Ezért a várható értéket - mint a fent definiált határértéket integrálként kezeljük, és használjuk az

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, P(d\omega) \qquad /0.17/$$

jelölést is.

Természetesen, ahogy képezhetjük $\mathbb{R}^n$ -ben egy függvény adott részhalmazon vett integrálját, itt is beszélhetünk eseményen vett integrálról, éspedig ha $A \in \mathcal{S}$ egy rögzitett esemény, és

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \omega \in A \\ 0, & \text{ha} \quad \omega \notin A \end{cases} \qquad /0.18/$$

akkor

$$\int_A \xi(\omega) P(d\omega) = E(\chi_A \cdot \xi) = \int_{\Omega} \chi_A(\omega)\, \xi(\omega)\, P(d\omega) \qquad /0.19/$$

Vektor változókról akkor beszélünk, ha olyan $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ leképezésünk van, melynek minden komponense valószinüségi változó, azaz teljesitik a /0.14/-et.

Sztochasztikus folyamaton olyan $\xi : \Omega \times T \to \mathbb{R}\ (\mathbb{R}^n)$ leképezést értünk /T az egészek halmaza, vagy intervallum/, melyből $t \in T$ tetszőleges rögzitése mellett a $\xi(\omega, t) = \xi_t(\omega)$ függvény valószinüségi változó.

Ha T intervallum, célszerü feltennünk, hogy a $\xi_t(\omega)$ trajektoriák tetszőleges $\omega \in \Omega$ rögzitése mellett t -ben jobbról folytonosak legyenek. Az ilyen folyamatokat nevezzük jobbról folytonosnak.

A ξ_t n-dimenziós jobbról folytonos sztochasztikus folyamatot a $0 \in \mathbb{R}^n$-ben aszimptotikusan stabilnak nevezzük, ha $\varepsilon > 0$ -hoz megadható a 0 -nak olyan K_0 és $G_\varepsilon(0) \subset K_0$ korlátos zárt környezete, hogy

1/ $$\frac{P((\xi_t \in K_0,\ t \geq 0) \cap (\xi_0 \in G_\varepsilon(0)))}{P(\xi_0 \in G_\varepsilon(0))} \geq 1-\varepsilon$$ és /0.20/

2/ Ha $\omega \in (\xi_t \in K_0,\ t \geq 0) \cap (\xi_0 \in G_\varepsilon(0))$, akkor

$\xi_t(\omega) \to 0$, $t \to \infty$ esetén. /0.21/

Az első feltétel azt jelenti, hogy azok a trajektóriák, amelyek a $t=0$ -ban a 0 elég kis környezetében vannak, elég nagy valószinüséggel /viszonyitva természetesen a 0 -beli feltétel teljesülésének valószinüségéhez/ a K_0 környezetben haladnak. A második feltétel a determinisztikus aszimptotikus stabilitás fogalmához hasonlóan a korlátosság feltételét teljesitő trajektóriáktól megköveteli a 0 -hoz tartást.

Megjegyezzük, hogy ha $G, K \subset R^n$ nyilt vagy zárt halmazok, és ξ vektor valószinüségi változó, akkor az $\{\omega /\ \xi(\omega) \in G\}$, $\{\omega \mid \xi(\omega) \in K\} \subset \Omega$ halmazok $\mathcal{S}$ -beliek, tehát események. A ξ_t folyamat jobbról folytonossága és $\mathcal{S}$ σ -algebra volta pedig maguk után vonják, hogy $\{\omega \mid \xi_t(\omega) \in K_0,\ t \geq 0\} \subset \Omega$ is esemény.

Ahogy a determinisztikus Ljapunov módszerben az aszimptotikus stabilitást definiáló feltételeket egy szigorú egyenlőtlenség /ld. V -re vonatkozó b/ feltétel/ illetve alkalmas halmazcsaládon a /0.6/ feltétel teljesülésére vezettük vissza, itt is szeretnénk a /0.20/ illetve /0.21/ feltételpárra könnyen ellenőrizhető átfogalmazást adni /vagy legalábbis elegendő feltételt/.

Tegyük fel, hogy a /0.6/ feltételben szereplő K_t halmaz egy μ sugarú zárt gömb, azaz $K_t = \{y \mid \|y\| \leq \mu\}$, ahol

$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$. A ξ_t vektorfolyamatunkra /0.6/ feltétel a /0.20/-al analóg átfogalmazását

$$1 \geq \frac{P((\xi_t \in K_t) \cap (\xi_{t'} \in K_t,\ t' \geq t))}{P(\xi_t \in K_t)} \geq q > 0 \qquad /0.22/$$

alakban irhatjuk fel.

Vegyük észre, hogy a /0.6/-hoz képest egy sztochasztikus folyamatnál nem követeljük meg minden, a feltételt teljesitő trajektóriától azt, hogy a K_t halmazban maradjon. Ez túlságosan erős megszoritás lenne /független növekményü folyamatokra már csak igen erős korlátozás mellett teljesülhetne/. Csupán annyit követelünk meg, hogy a feltétel valószinüségéhez képest elég "nagy" valószinüséggel teljesüljön a kivánt tulajdonság.

Egyszerüség kedvéért vizsgáljuk meg egy rögzitett $t' > t$ -re egy /0.22/ tipusú feltétel teljesülésének feltételét.

Képezzük a $\|\xi_{t'}\|$ valószinüségi változóknak a $\{\xi_t \in K_t\}$ eseményre vett /0.19/ alakú integrálját:

$$\int_{\{\xi_t \in K_t\}} \|\xi_{t'}\|(\omega)\, P(d\omega) = M_{t'} \qquad /0.23/$$

Megpróbálunk becslést adni a

$$q_\lambda = P(\{\|\xi_t\| \leq \mu\} \cap \{\|\xi_{t'}\| > \lambda > 0\}) \qquad /0.24/$$

valószinüségre az $M_{t'}$ felhasználásával:

$$q_\lambda \cdot \lambda < \int_{\{\|\xi_t\| \leq \mu\} \cap \{\|\xi_{t'}\| > \lambda\}} \|\xi_{t'}\|\, dP \leq M_{t'} \qquad /0.25/$$

/Megjegyezzük, hogy e becslés az integrálnak azon az igen egyszerü és könnyen belátható tulajdonságán alapszik, hogy $f \geq g$, $\int_\Omega f \geq \int_\Omega g$, és konkrétan a /0.19/ formulán, és mindössze azt vettük tekintetbe, hogy ha $A \subset \Omega$ -n teljesül a $\|\xi_{t'}\| \geq \lambda$, akkor $\int_A \|\xi_{t'}\| dP = \int_\Omega \chi_A \cdot \|\xi_{t'}\| dP \geq \int_\Omega \chi_A \cdot \lambda dP = \lambda P(A)$). Ebből azonnal adódik q_λ becslése λ -val való osztás útján. Bennünket természetesen az érdekel, hogy $\lambda = \mu$ esetére $q_\lambda < P\{\xi_t \in K_t\}$ teljesüljön, vagyis

$$q_\mu < \frac{M_{t'}}{\mu} < P\{\xi_t \in K_t\} \qquad /0.26/$$

Ha már most az egyenlőtlenség második felét átrendezzük, akkor a

$$\frac{M_{t'}}{P\{\xi_t \in K_t\}} < \mu \qquad /0.27/$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amely maga után vonja a /0.22/ teljesülését. A norma konvexitását felhasználva a /0.6/ alábbi analóg felirását kapjuk $t' > t$ rögzitése mellett:

$$\left\{ \int_{\{\xi_t \in K_t\}} \xi_{t'} dP \right\} \cdot \frac{1}{P\{\xi_t \in K_t\}} \in K_t \qquad /0.28/$$

Mint ez az idézett irodalmakból jól ismert /[1],[2]/, a /0.22/ és /0.27/ és /0.28/-ban szereplő hányadosok épp a $\{\xi_t \in K_t\}$ eseménnyel mint feltétellel vett feltételes valószinüség/ek/ ill. feltételes várható értékek.

Értékelve a /0.27/ ill. /0.28/ feltételeket azt mondha juk, hogy sztochasztikus folyamatok trajektóriáinak viselkedését $t'>t$ -ben nem határozzák meg azok t -beli tulajdonságai. Valamilyen t időpontbeli feltételt teljesitő trajektóriasereg $t \leq t'$ -beli viselkedésére csupán valószinüségi természetü kijelentéseket tehetünk. Ezért a Ljapunov módszernél a /0.6/-nak megfelelő tartalmazást nincs értelme megkövetelni. Helyette a /0.28/-nak megfelelő feltételes várható érték tartalmazását követeljük meg. Ljapunov függvények esetében úgyszintén a folyamat $V(\xi_{t'})$ Ljapunov függvényének /esetünkben a $V = \|\;\|$ szerepelt/ feltételes várható értékével dolgozunk /ld. a /0.28/ feltétel/. Természetesen amennyivel a /0.22/ feltételes valószinüség bonyolultabb eseményre vonatkozik a most vizsgált /0.24/-beli eseménynél, annyival mélyebb egyenlőtlenségeket használunk fel majd tanulmányunkban a felvetett kérdéskör tanulmányozásakor.

A dolgozatunkban felhasznált legfontosabb fogalmak egyike a feltételes várható érték. Mivel a feltételes várható érték fogalmának az előismeretként megadott irodalomban található tárgyalásnál mélyebb ismeretére lesz szükségünk, bevezetőnk hátralévő részében ezt foglaljuk össze.

Mint a /0.27/ és /0.28/-ban szereplő formulák mutatják, adott eseménnyel mint feltétellel képezett feltételes várható érték a feltételt jelentő eseménytől függ. A feltételes várható érték tehát az eseményalgebra elemein értelmezett valós illetve R^n -beli értékü függvény. Ez azt jelenti, hogy a feltételes várható érték az elemi események minden egyes T -beli tulajdonságát egy számszerü jellemzéssel egésziti ki.

Bár példát adhatunk olyan valószinüségi mezőre és valószinüségi változóra, ahol az események és a feltételes várható értékek fenti kapcsolata kölcsönösen egyértelmü és igy beszélhetünk e számértékek bekövetkezési valószinüségéről is, a kisérletek kimeneteleinek ilyen számszerü jellemzése mégsem határoz meg valószinüségi változót. Ugyanis a számértékek eseményekhez és nem elemi eseményekhez vannak hozzárendelve, és egy elemi esemény több eseményhez is tartozhat.

Ha azonban veszünk egy tetszőleges olyan $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ megszámlálható eseményből álló feltétel rendszert, mely rendelkezik az

a/ $A_i \cap A_j = \Phi \quad , \; i \neq j$

b/ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$

tulajdonságokkal, akkor $E(\xi / A_i)$ -vel jelölve a ξ valószinüségi változó A_i feltétellel vett feltételes várható értékét, egy valószinüségi változót adhatunk meg

$$f(\omega) = E(\xi \mid A_i) \quad \text{ha} \quad \omega \in A_i \, , \; i = 1, 2, \ldots \qquad /0.29/$$

alakban. /Azaz az f az A_i -beli elemi eseményeken az $E(\xi \mid A_i)$ értéket veszi fel, $i = 1, 2, \ldots$ mellett/. Az f valószinüségi változót nevezzük a <u>ξ valószinüségi változó $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ eseményrendszerrel mint feltétellel vett feltételes várható értékének.</u> Az f valószinüségi változó éppen annak a kisérletnek a leirására szolgál, amelyben az $E(\xi / A_i)$ értékeket "sorsoljuk ki". Ha az $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ halmazok egy megszámlálható értékkészletü η valószinüségi változó értékeihez tartozó nivóhalmazok /azaz $A_i = \{\omega \mid \eta(\omega) = c_i \, , \; c_i \in R\}$ akkor az f -et $E(\xi \mid \eta)$ val jelöljük, és az <u>η valószinüségi</u>

változóval mint feltétellel vett feltételes várható értéknek nevezzük.

Képezve az $\mathcal{F}_A = \sigma\left(\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \mid \{A_i\}_1^{\infty}\right)$ halmazokat tartalmazó legszükebb σ-algebrát /az η esetén $\sigma(\eta)$-t/, a /0.29/ definicióval egyenértékü, ha az alábbi

$$\int_B f(w)\,P(dw) = \int_B \xi(w)\,P(dw) \qquad /0.30/$$

egyenlőség fennáll minden $B \in \mathcal{F}_A$ ill $\sigma(\eta)$ esetén, és tetszőleges $V \subset \mathcal{B}(R)$ Borel halmazra teljesül a

$$f^{-1}(V) = \{w \mid f(w) \in V\} \in \mathcal{F}_A \quad (\text{ill. } \sigma(\eta)) \qquad /0.31/$$

reláció.

Az, hogy a /0.29/-ből, és az $E(\xi / A_i) := \int_{A_i} \xi(w)\,P(dw) / P(A_i)$ definicióból következnek a /0.30/ és /0.31/ tulajdonságok, könnyen belátható.

Nézzük először a /0.31/-et:

Miután az $f(w)$ a /0.29/-el van definiálva, igy ha $V \in \mathcal{B}(R)$ tetszőleges Borel halmaz, és $f^{-1}(V) = \{w \mid f(w) \in B\}$, ezért $f^{-1}(V) \supset A_i \in \mathcal{F}_A$, ha $E(\xi/A_i) \in V$. Másrészt ha $w \in f^{-1}(V)$, akkor $f(w) \in V$, de $w \in A_j$ valamilyen j-re, és mivel A_j -n az f a /0.29/ miatt állandó, igy $f^{-1}(V) \supset A_j$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $f^{-1}(V) = \bigcup_{E(\xi/A_j) \in V} A_j$, ami $\mathcal{F}_A$-beli halmazok legfeljebb megszámlálható egyesitése, igy $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_A$.

Legyen most $B \in \mathcal{F}_A$ egy tetszőleges halmaz, ez előáll $B = \bigcup_{A_j \subset B} A_j$ alakban, ami legfeljebb megszámlálható, és A_j-k, mint tudjuk, páronként diszjunktak. Ezért

$$\int_B f(\omega)\,dP = \sum_{A_j \subset B}' \int_{A_j} f(\omega)\,dP = \sum_{A_j \subset B}' \int_{A_j} E(\xi/A_j)\,dP =$$

$$= \sum_{A_j \subset B}' E(\xi/A_j)P(A_j) = \sum_{A_j \subset B}' \Big(\int_{A_j} \xi\,dP\Big)/P(A_j)\Big)P(A_j) = \sum_{A_j \subset B}' \int_{A_j} \xi\,dP =$$

$$= \int_B \xi\,dP,$$

ahol felhasználtuk az integrál σ -additivitását /a /0.19/-el definiált integrál megszámlálható felbontásra additiv/, és a feltételes várható érték definicióját.

Az állitás megforditását a Radon-Nikodim tétel biztositja nevezetesen: ha ξ egy integrálható valószinüségi változó, $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ egy σ -algebra, akkor 1 valószinüséggel egyértelmüen létezik olyan f valószinüségi változó, melyre

1/ tetszőleges $V \in \mathcal{B}(R)$ esetén $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$,

2/ $\int_B f(\omega)\,P(d\omega) = \int_B \xi(\omega)\,P(d\omega)$ minden $B \in \mathcal{F}$ -re.

E tétel lehetőséget nyújt arra, hogy egy ξ integrálható valószinüségi változónak $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ tetszőleges σ -algebrával képezett feltételes várható értékét definiálhassuk, mint a Radon-Nikodym tételt által biztositott 1/, 2/-t teljesitő f valószinüségi változót. Ezt $E(\xi/\mathcal{F})$ -el jelöljük, ill. ha $\mathcal{F} = \sigma(\eta)$, ahol η egy tetszőleges valószinüségi változó, akkor $E(\xi/\eta)$.

Integrálható ill. olyan valószinüségi változót feltételezve, melynek létezik a várható értéke, az alábbi formális tulajdonságok igazak a feltételes várható értékre:

1/ $E(\xi/\eta) = \varphi(\eta)$, ahol φ $R \to R$ /0.32/

alkalmas függvény, melyre minden $B \in \mathcal{B}(R)$ esetén $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(R)$.

2/ Ha ξ teljesiti a $\xi^{-1}(B)\in \mathcal{F}\subset \mathcal{S}$ feltételt minden $B\in\mathcal{B}(R)$ Borel halmazra akkor

$$E(\xi\mid\mathcal{F})=\xi. \qquad /0.33/$$

3/ Ha η eloszlása F és $E(\xi/\eta)=\varphi(\eta)$, akkor

$$\int_{\eta^{-1}(B)}\xi\,dP=\int_{\eta^{-1}(B)}E(\xi\mid\eta)\,dP=\int_B\varphi(x)\,dF(x) \qquad /0.34/$$

minden $B\in\mathcal{B}(R^n)$.

Megjegyezzük, hogy egy ξ valószinüségi változó eloszlásfüggvénye, mint ez ismeretes nem más, mint $F(x)=$ $=P(\xi\leq x)$, és igy a feltételes eloszlásfüggvény $F(x\mid\eta)=P(\xi\leq x\mid\eta)$.

4/ Ha ξ teljesiti a 2/ feltételét, η pedig tetszőleges integrálható valószinüségi változó, akkor

$$E(\xi\cdot\eta\mid\mathcal{F})=\xi\,E(\eta/\mathcal{F}) \qquad /0.35/$$

Végül pedig bevezetve egy speciális valószinüségi változó tipust, az esemény karakterisztikus függvényét: $A\in\mathcal{S}$ esetén

$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}1, & \text{ha } \omega\in A\\ 0, & \text{ha } \omega\notin A,\end{cases} \qquad /0.36/$$

könnyü utánagondolni, hogy ennek <u>feltételes várható értéke épp a feltételes</u> valószinüség lesz:

$$E(\chi_A\mid\mathcal{F})=P(A\mid\mathcal{F}) \quad \text{ill.}$$
$$E(\chi_A\mid\eta)=P(A/\eta)=\varphi(A,\eta) \qquad /0.37/$$

Ezek mint A függvényei rögzitett ω ill. $\eta=C$ mellett valószinüségi mértékek /pontosabban ezzel az esettel foglalkozunk, mert automatikusan nem teljesül/, és fennállnak az

$$E(\xi \mid \mathcal{F}) = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, P(d\omega \mid \mathcal{F})$$

ill.

$$E(\xi \mid \eta) = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, P(d\omega / \eta) = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, \varphi(d\omega; \eta) =$$

$$= \varphi_{\xi}(\eta) . \qquad /0.38/$$

Ezen összefoglalás után rátérünk a stabilitási vizsgálatokra, melyekhez szükséges további alapfogalmak a függelékben találhatók meg.

I. Fejezet

1. HOMOGÉN MARKOV FOLYAMATOK SZTOCHASZTIKUS LJAPUNOV FÜGGVÉNYEI

1.1 Alapfeltevések

Az 1. pontban a sztochasztikus folyamatok egy speciális szabályának, a homogén Markov folyamatoknak trajektóriáit vizsgáljuk, abból a szempontból, hogy adott halmazból inditva milyen feltételek mellett biztositható, hogy a trajektóriák valamilyen rögzitett halmazhoz tartsanak. Mint a bevezetőben láttuk, annak megkövetelése, hogy a trajektóriák elég nagy valószinüséggel adott halmazban haladjanak, a /0.28/ relációhoz, illetve Ljapunov függvények alkalmazása esetén egy a Ljapunov függvény feltételes várható értékére vonatkozó relációhoz vezetett.

Az 1.1 pontban a sztochasztikus Ljapunov módszer pontos kidolgozásához szükséges alapfeltevéseket adjuk meg. A függelékben megtalálható azoknak a fontosabb fogalmaknak a definiciója, amelyekről a bevezetőben nem esett szó. Az erre vonatkozó utalásokat zárójelben adjuk meg.

Legyen $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ valószinüségi mező és $\{\xi_t\}, t \in R^+$, $\xi_t: \Omega \to R^n, t \in R^+$ n-dimenziós, jobbról folytonos, erős értelemben vett Markov folyamat /ld. F. 3. pont/. Tegyük fel, hogy adott egy $V: R^n \to R$ folytonos függvény és egy $G_m \subset R^n$ nyilt halmaz, úgy, hogy

$$G_m = \{x \mid x \in R^n, V(x) < m\}, \qquad /1.1/$$

ahol $m \in R^+$ alkalmas pozitiv szám és $Vx \geq 0$ ha $x \in G_m$.

Mint látható, G_m a $V(x)$ folytonos függvény egy nivóhalmaza és a determinisztikus eset /0.5/-tel megadott K_t halmazának a megfelelője. A G_m halmaz és V függvény megválasztásához itt most csak annyit, hogy rendszerint a V függvényhez választjuk meg a G_m halmazt, de a forditott feladat is előállhat.

Fontos szerepet játszik a $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ Markov folyamatnak a G_m halmazból való első kilépési ideje, amely tehát a következő τ_m valószinüségi változó:

$$\tau_m(\omega) = \inf \{t \mid \xi_t(\omega) \notin G_m,\ t \in R^+\} \qquad /1.2/$$

Ha egy trajektória végig a G_m halmazban halad, akkor a hozzátartozó $\omega \in \Omega$ -ra $\tau_m(\omega) = \infty$ igy a

$$B_m = \{\tau_m = \infty\}$$

halmaz éppen a G_m -ben haladó trajektóriákat jelöli ki.

Tegyük fel most, hogy adott egy jobbról folytonos $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ monoton növő σ -algebra család, melyre nézve ξ_t $\mathcal{F}_t$ mérhető minden $t \in R^+$ mellett. Akkor τ_m erre nézve Markov pont /ld. F. 2. pont/. Tudjuk továbbá, hogyha ξ_t homogén Markov folyamat, akkor a $\{\xi_{t\wedge\tau_m}\}_{t\in R^+}$ folyamat is az /ld. F.3. pont/. Azok helyett a trajektóriák helyett tehát, amelyek a G_m halmazból kilépnek, a $\xi_{t\wedge\tau_m}$ "megállitott" folyamatot vizsgáljuk /ezért van szükségünk az erős Markovitás feltételezésére/, alapvetően pedig B_m tipusú halmazok valószinüségére illetve az ezekhez tartozó trajektóriák viselkedésére vonatkozó állításokat mondunk ki.

A tételek bizonyitását a téma iránt különböző mélységben érdeklődő olvasókra való tekintettel a megfelelő pont végén közöljük.

1.2 Homogén Markov folyamatok stabilitása

A stabilitási tételek mind azon alapulnak, hogy a $\{V(\xi_{t\wedge\tau_m}), \mathcal{F}_{t\wedge\tau_m}\}_{t\in R^+}$ folyamat bizonyos feltételek teljesülése esetén pozitiv szupermartingált alkot, és ennek következtében alkalmazhatók a martingálok elméletéből jól ismert konvergenciatételek illetve a martingálokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Ezt a tényt mondja ki az alaplemma, a feltételek megfogalmazásában pedig a homogén Markov folyamat infinitezimális generátora játszik fontos szerepet.

Ha a $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ folyamat homogén Markov folyamat, akkor a $\{\xi_{t\wedge\tau_m}\}_{t\in R^+}$ is az. /A jelölések ugyanazok, mint az 1.1 pontban/. Igy ha Q^*_{t,G_m} a $\xi_{t\wedge\tau_m}$ halmaz infinitezimális generátora, akkor bevezethetjük a $Q^*_{t,G_m}=Q^*_m$ jelölést /ld. F. 3.3. tételét/. Tegyük még fel, hogy az 1.1 pontban megadott V függvény benne van Q^*_m értelmezési tartományában.

1.1 Alaplemma Ha $Q^*_m V(x)\leq 0$ minden $x\in G_m$ mellett, akkor

1/ A $\{V(\xi_{t\wedge\tau_m}), \mathcal{F}_{t\wedge\tau_m}\}_{t\in R^+}$ folyamat jobbról folytonos pozitiv szupermartingál.

2/ $\lambda\leq m$, $x\in G_m$ esetén

$$P\left\{\sup_{0\le t<\infty} V(\xi_{t\wedge\tau_m}) \ge \lambda \,|\, \xi_0 = x\right\} \le \frac{V(x)}{\lambda} \qquad /1.3/$$

3/ $$P(B_m \,|\, \xi_0 = x) \ge 1 - \frac{V(x)}{m} \qquad /1.4/$$

4/ $\omega \in B_m$ mellett $V(\xi_t(\omega)) \to c(\omega)$, azaz

$$P\left(V(\xi_t) \to c \,|\, B_m\right) = 1, \quad t \to \infty$$

Az alaplemma 3/ állitása az $x \in G_m$ tetszőleges pontban induló és G_m -ben haladó trajektóriák mértékére ad becslést, a 4/ állitás pedig azt mondja, hogy majdnem minden B_m -beli trajektóriára $V(\xi_t)$ egy konstanshoz tart $t \to \infty$ esetén.

<u>Elnevezés</u> Az 1.1 alaplemma feltételeinek eleget tevő V függvényt a $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ homogén Markov folyamattal megadott rendszer Ljapunov függvényének nevezzük.

Tételeink kimondásához most már csak a stabilitás fogalmának valószinüségi keretek között használható definiálására van szükség.

<u>1.1 Definició</u> Az n-dimenziós Markov folyamattal leirt rendszer stabil a $\{G, H, \varrho\}$, $G \subset H \subset R^n$, $0 < \varrho \le 1$ hármasra nézve, ha $x \in G$ esetén

$$P\{\xi_t \in H,\ t \in R^+ \,|\, \xi_0 = x\} \ge \varrho \qquad /1.15/$$

<u>1.2 Definició</u> Az R^n tér 0 pontját 1 valószinüséggel stabilnak nevezzük, ha megadható tetszőleges $\varrho > 0$ és $\varepsilon > 0$ számhoz a 0-nak olyan $\delta(\varrho, \varepsilon)$ környezete, hogy ha $\|x\| < \delta(\varrho, \varepsilon)$ akkor

$$P\left\{\sup_{0\le t<\infty}\|\xi_t\|\geq\varepsilon \mid \xi_0=x\right\}\leq\rho \qquad /1.16/$$

Az 1.1 és 1.2 definició alkalmazásával könnyü meggondolni, hogy az 1.1 alaplemma egyszerü következményeként rögtön adódik az

<u>1.1 Tétel</u> Tegyük fel, hogy a rendszert jellemző homogén Markov folyamat Ljapunov függvénye eleget tesz a $V(0)=0$ feltételnek /azaz $0\in G_m$ /. Akkor a rendszer stabil a $\{G_r, G_m, 1-\frac{r}{m}\}$, $r<m$ hármasra nézve, valamint $V(\xi_{t\wedge\tau_m(\omega)})\to C(\omega)\leq m$ 1 valószinüséggel a B_m halmazon. Ha $x\neq 0$ esetén $V(x)\neq 0$, akkor 0 1 valószinüséggel stabil.

<u>1.3 Definició</u> Az n-dimenziós Markov folyamattal leirt rendszer aszimptotikusan stabil a $\{G, H, \rho\}$ hármasra nézve, $G\subset H\subset R^n$, $0<\rho\leq 1$ ha $x\in H$ mellett

$$P\left(\xi_t\to G \mid \xi_0=x\right)\geq\rho, \qquad /1.17/$$

és 1 valószinüséggel aszimptotikusan stabil, ha /1.17/ $\rho=1$ mellett teljesül.

Az aszimptotikus stabilitási tételek fő problémája, mint az a definicióból látható, éppen a G halmaz megadása lesz. A sztochasztikus Ljapunov módszer alkalmazása miatt várható, hogy az 1.3 definicióban szereplő H halmaz szerepét általában G_m játssza majd, a ρ számot az 1.1 alaplemma sugallja.

A probléma megoldásához néhány eddig még nem emlitett fogalomra is szükségünk lesz. Mindenekelőtt bevezetjük a következő jelöléseket.

Legyen

$$H_\varepsilon := \{x \mid x \in G, \text{ és } \exists y \in H, \text{ hogy } \|x-y\| < \varepsilon\}, \qquad /1.20/$$

azaz H_ε egy $H \subset R^n$ halmaz $G \subset R^n$ -beli ε -környezete. /Adott H és G esetén külön nem jelöljük, hogy H_ε a G -beli környezetet jelenti, hacsak ez félreértéshez nem vezet./ Hasonlóan H G -beli lezárásán a

$$\overline{H} \cap G \qquad /1.21/$$

halmazt értjük.

<u>1.1 Megjegyzés</u> Egy tetszőleges $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ sztochasztikus folyamatot sztochasztikusan folytonosnak nevezünk, ha minden $t \in R^+$ mellett $\varepsilon>0, \delta>0$ -hoz megadható olyan $h(\varepsilon,\delta)>0$, hogy

$$P(\|\xi_t - \xi_s\| > \varepsilon) < \delta \qquad /1.22/$$

ha $|t-s| \leq h(\varepsilon,\delta)$.

Markov folyamatokra ezt a tulajdonságot a következő módon adhatjuk meg az átmenet valószinüségek segitségével: egy $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ Markov folyamatot sztochasztikusan folytonosnak nevezünk a $(t,x) \in R^+ \times R^n$ pontban, ha $\varepsilon,\delta>0$-hoz megadható olyan $h(\varepsilon,\delta,t,x)$, hogy

$$P\{\|\xi_s - x\| \geq \varepsilon \mid \xi_t = x\} < \delta \qquad /1.23/$$

minden $h(\varepsilon,\delta,t,x) \geq s-t \geq 0$ mellett.

Az egyenletes folytonosság pedig Markov folyamatok esetén az alábbiakat jelenti: a $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ folyamat egyenletesen sztochasztikusan folytonos a $\{t\}\times M\subset R^+\times R^n$ halmazon, ha $\varepsilon>0$ és $\delta>0$ -hoz létezik olyan $h(\delta,\varepsilon)>0$ szám, hogy

$$\sup_{x\in M} P\{\sup_{0\le s\le h}\|\xi_s-x\|>\varepsilon \mid \xi_t=x\}<\delta. \qquad /1.24/$$

<u>1.1a Megjegyzés</u> Könnyen látható, hogy homogén Markov folyamatok esetén a $t=0$ -beli sztochasztikus folytonosságból /illetve egyenletes sztochasztikus folytonosságból/ következik, hogy a folyamat minden $t\in R^+$-re sztochasztikusan folytonos /illetve egyenletesen sztochasztikusan folytonos/ lesz.

<u>1.2 Megjegyzés</u> Ha adott egy $M\subset R^n$ kompakt halmaz és a ξ_t Markov folyamat a $\{t\}\times M$ halmazon sztochasztikusan folytonos, akkor ott egyenletesen sztochasztikusan folytonos is.

<u>1.2 Tétel</u> A $\{\xi_t\}$ homogén Markov folyamattal leirt rendszernek legyen V a sztochasztikus Ljapunov függvénye és tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:

1/ G_m korlátos halmaz, és a $\xi_{t\wedge\tau_m}$ folyamat G_m -en sztochasztikusan folytonos.

2/ Legyen $k(x)=-(Q_m^* V)(x)\ge 0,\quad x\in G_m$

3/ Legyen $P_m=G_m\cap\{x \mid k(x)=0\}.$

4/ tegyük fel, hogy létezik olyan $d_0>0$, hogy minden $0<d<d_0$ mellett alkalmas ε_d -vel

$$k(x) \geq d_1 \quad \text{ha} \quad x \in G_m \setminus (P_m)_{\varepsilon_d} \qquad /1.25/$$

Akkor

$$P(\xi_t \to P_m \mid \xi_0 = x) \geq 1 - \frac{V(x)}{m}. \qquad /1.26/$$

A Ljapunov függvényre tett feltételek némileg gyengithetők, pontosabban tekintsük a $\{\xi_t\}$ homogén Markov folyamatot és tegyük fel, hogy adva van egy olyan $V: R^n \to R^+$ nem szükségképpen korlátos függvény melyre teljesülnek a következők:

1/ $\chi_{G_m} \cdot V$ minden $m = 1, 2, \ldots$ mellett benne van Q_m^* értelmezési tartományában.

2/ Jelöljük G -vel az $\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$ nyilt halmazt.

3/ Legyen $\chi_{G_m} V$ Ljapunov függvény a G_m -en és legyen $-k_m(x) = (Q_m(\chi_{G_m} V))(x)$, $x \in G_m$, $m = 1, 2, \ldots$ mellett.

4/ Legyen

$$P_m = G_m \cap \{x \mid k_m(x) = 0\} \qquad /1.27/$$

5/ Legyen

$$P = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m. \qquad /1.28/$$

Ezen feltevések után az 1.2 tételből közvetlenül következik az

<u>1.3 Tétel</u> Tegyük fel, hogy az 1.2 tétel feltételei minden m=1,2,...-re teljesülnek az /1.27/-ben szereplő P_m, G_m és k_m -re. Akkor $x \in G$ esetén

$$P(\xi_t \to P \mid \xi_0 = x) = 1. \qquad /1.29/$$

1.3 Megjegyzés Mivel a G_m halmazok monoton halmazsorozatot alkotnak az 1.3 tétel valóban az 1.2 tétel nyilvánvaló következménye.

1.4 Megjegyzés Ha a $p(x,t,A)$ átmenet valószinüség minden $(x,A)\in R^k\times\mathcal{B}(R^k)$ mellett $t=0$ -ban differenciálható, akkor $k_m=\chi_{G_m}\cdot k_{m+r}$ minden $r\geq 0$ -ra /ld. F.4.7 megjegyzését/. Ebben az esetben a $P_{m+r}\supset P_m$ relációk is teljesülnek.

1.5 Megjegyzés Ha V nem korlátos és $G=R^k$ akkor /1.29/ feltétel nélkül is érvényes.

1.6 Megjegyzés Ha az 1.2 tételben a $k(x)$ függvény G_m -en /az 1.3 tételben $k_m(x)$/ egyenletesen folytonos, és van olyan $x\in G_m$, hogy $k(x)\neq 0$, /$k_m(x)\neq 0$/, ez biztositja a kivánt $d_0>0$ szám létezését.

1.7 Megjegyzés A G_m halmaz korlátosságát csupán azért kellett feltennünk, hogy az 1.2 megjegyzést felhasználhassuk az egyenletes sztochasztikus folytonosság teljesüléséhez. Ennek elkerülésére két lehetőség adódik:

1/ Ha G_m nem korlátos, feltesszük az egyenletes sztochasztikus folytonosságot G_m -en.

2/ G_m -et előállitjuk kompakt halmazok egyesitéseként:

$$G_m=\bigcup_{r=1}^{\infty}\overline{G_r(0)}\cap G_m, \qquad /1.51/$$

és minden $A_r=\overline{G_r(0)}\cap G_m$ -en megköveteljük az 1.2 tétel feltételeit. Ebben az esetben minden

$$\omega \in B_{m,r} = \left\{ \xi_{t\wedge\tau_m}(\omega) \in A_r,\ t>0 \right\} \qquad /1.52/$$

trajektóriára érvényes, hogy $P_m \cap \overline{G_r(0)}$ -hoz tart $t \to \infty$ mellett / $\overline{G_r(0)}$ a 0 körüli r sugarú zárt gömb/.

Ha még az is teljesül, hogy

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} B_{m,r} = B_m, \qquad /1.53/$$

/ez /1.52/ miatt akkor és csak akkor igaz, ha

$$P\left\{ \|\xi_t(\omega)\| \to \infty,\ \omega \in B_m \mid \xi_0 = x \right\} = 0 \qquad /1.54//,$$

akkor a következő tételt kapjuk:

1.4 Tétel Tegyük fel, hogy az 1.2 tétel 2/ és 3/ feltétele teljesül, ezenkívül hogy

1'/ $\xi_{t\wedge\tau_m}$ sztochasztikusan folytonos a nem szükségképpen korlátos G_m -en.

4'/ Teljesüljön az 1.2 tétel 4/ feltétele minden A_r -en $\varepsilon_{d,r}$ -rel.

Ha emellett még /1.54/ is fennáll, akkor

$$P\left(\xi_t \to P_m \mid \xi_0 = x \right) \geq 1 - \frac{V(x)}{m} \qquad /1.55/$$

1.5 Tétel Tegyük fel, hogy érvényes az 1.2 tétel 2/,3/ és 4/ feltétele, valamint

1"/ $\xi_{t\wedge\tau_m}$ egyenletesen sztochasztikusan folytonos G_m -en, ami nem szükségképpen korlátos, akkor

$$P\left(\xi_t \to P_m \mid \xi_0 = x \right) \geq 1 - \frac{V(x)}{m}.$$

Az aszimptotikus stabilitás bizonyitásának egy másik, igen fontos esetét vizsgáljuk ezek után. Kiindulási feltételeink az 1.1 tételben már megismert környezetből kerülnek ki. Az aszimptotikus stabilitást lényegében a $Q_m^* V(x)$ mennyiségre adott, az 1.1 tételhez képest szigorúbb feltevés biztositja.

<u>1.6 Tétel</u> Legyen $\{\xi_t\}$ homogén Markov folyamat, és tegyük fel, hogy Ljapunov függvényére a következők teljesülnek:

a/ $V(0)=0$ azaz $0 \in G_m$.

b/ $Q_m^* V(x) \leq -\alpha V(x)$ valamilyen $\alpha > 0$ számra minden $x \in G_m$ mellett.

Akkor

1/

$$P\left(\left\{\sup_{T \leq t < \infty} V(\xi_t) \geq \lambda \right| \xi_0 = x\right) \leq \frac{V(x)}{m} + \frac{V(x)\, e^{-\alpha T}}{\lambda} \qquad /1.55/$$

2/ Ha b/ teljesül tetszőleges $m > 0$-ra, akkor

$$P\left(\left\{\sup_{T \leq t < \infty} V(\xi_t) \geq \lambda\right\} \middle| \xi_0 = x\right) \leq \frac{V(x)\, e^{-\alpha T}}{\lambda} \qquad /1.56/$$

<u>1.8 Megjegyzés</u> Az 1.6 tétel a/ feltétele legfeljebb $\inf_{x \in G_m} V(x) = 0$ -re gyengithető. Ugyanis ha $V(x) > \tilde{c} > 0$ akkor ebből következik, hogy $(Q_m^* V)(x) < \tilde{c}_\alpha < 0$ minden $x \in G_m$ -re a tétel b/ feltétele szerint, akkor az 1.2 lemma szerint $P(B_m) = 0$. /Az 1.2 lemma az 1.2 tétel bizonyitásához csatolva az 1. pont végén található/. Ez pedig ellentmond az 1.1 alaplemmának. Az a/ feltétel helyettesitésére természetesen olyan $x \in R^n$ pont

létezése is elegendő, melyre $V(x)=0$.

<u>1.9 Megjegyzés</u> $p:=\{x \mid V(x)=0\}$ jelöléssel az 1.6 tételből következik, hogy

$$P(\xi_t \to p \mid \xi_0 = x) \geq 1 - \frac{V(x)}{m} \qquad /1.60/$$

1.3 A tételek bizonyitásai

Az 1.1 Alaplemma bizonyitása.

<u>Bizonyitás:</u> 1/ A $V(\xi_{t\wedge\tau_m}) \geq 0$, ez nyilvánvaló. Ki kell számitanunk a

$$E\left(V(\xi_{t'\wedge\tau_m}) - V(\xi_{t\wedge\tau_m}) \mid \xi_{t\wedge\tau_m}\right) \qquad /1.5/$$

feltételes várható értéket.

Ez azonban éppen

$$E\left(V(\xi_{t'\wedge\tau_m}) \mid \xi_{t\wedge\tau_m}\right) - V(\xi_{t\wedge\tau_m}) =$$
$$= \left(S_m^{t'-t} V\right)(\xi_{t\wedge\tau_m}) - S_m^0 V(\xi_{t\wedge\tau_m}) \qquad /1.6/$$

ahol S_m a $\xi_{t\wedge\tau_m}$-hoz tartozó $B(R^n, B(R^n))$ -en ható időeltolási félcsoport /ld. Függelék 4. pontját/. Alkalmazzuk most a Dynkin formulát /ld. Függelék 4.7 megjegyzését/, vagy használjuk fel a

$$\frac{d}{ds}\left(S_m^s V\right)(\xi_{t\wedge\tau_m}) = \left(S_m^{s_0} Q_m^* V\right)(\xi_{t\wedge\tau_m}) \qquad /1.7/$$

formulát, amivel

$$\left(S_m^{t'-t} V\right)(\xi_{t\wedge\tau_m}) - \left(S_m^0 V\right)(\xi_{t\wedge\tau_m}) = \int_0^{t'-t} \left(S_m^s \cdot Q_m^* V\right)(\xi_{t\wedge\tau_m})\, ds$$

Ha itt tekintetbe vesszük azt, hogy

$\left(S_m^s h\right)(x) = E\left(h(\xi_{(t+s)\wedge\tau_m}) \mid \xi_{t\wedge\tau_m} = x\right)$, és azt, hogy

$$E\left(h\left(\xi_{(t+s)\wedge\tau_m}\right)\Big|\,\xi_{t\wedge\tau_m}\right)=\int_{\Omega} h\left(\xi_{(t+s)\wedge\tau_m}^{(w)}\right) P\left(dw\,|\,\xi_{t\wedge\tau_m}\right),$$

akkor az s és w szerinti integrálok cseréjével

$$\left(S_m^{t'-t}V\right)\left(\xi_{t\wedge\tau_m}\right)-V\left(\xi_{t\wedge\tau_m}\right)=E\left(\int_0^{t'-t}\left(Q_m^{*}V\right)\left(\xi_{(t+s)\wedge\tau_m}\right)ds\,\Big|\,\xi_{t\wedge\tau_m}\right) \qquad /1.8/$$

Tekintetbe véve, hogy $Q_m^{*}V(x)\leq 0$ ha $x\in G_m$, megkaptuk az 1/ állitást. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy $\xi_{t\wedge\tau_m}$ jobbról folytonos és V folytonos, úgy $\{V(\xi_{t\wedge\tau_m}),\mathcal{F}_{t\wedge\tau_m}\}_{t\in R^+}$ egy jobbról folytonos pozitiv szupermartingál.

A pozitiv szupermartingálok, mint ismeretes, 1 valószinüséggel konvergálnak, és B_m definicióját figyelembe véve, $w\in B_m$ mellett

$$V\left(\xi_{t\wedge\tau_m^{(w)}}\right)=V\left(\xi_t(w)\right),$$

és igy valóban B_m -en a $V(\xi_t)$ tart egy C függvényhez.

A 2/ és 3/ állitás bizonyitásához felépitjük a feltételes valószinüség és megszoritás segitségével az alábbi valószinüségi mezőt: ha $x\in G_1$ akkor

$$\Omega_x=\{\xi_0=x\},$$
$$\mathcal{F}_x=\{A\,|\,A\in\mathcal{F},\ A\subset\{\xi_0=x\}\},$$
$$P_x(A)=P\left(A\,|\,\xi_0=x\right),\ A\in\mathcal{F}_x. \qquad /1.9/$$

Vegyük ezután a

$$\mathcal{F}^x_{t\wedge\tau_m}=\{A\,|\,A\in\mathcal{F}_{t\wedge\tau_m},\ A\subset\{\xi_0=x\}\}, \qquad /1.10/$$

$t\in R^+$ σ-algebracsaládot, továbbá a

$$V^x\left(\xi_{t\wedge\tau_m}\right)=V\left(\xi_{t\wedge\tau_m}\right)\chi_{\{\xi_0=x\}} \qquad /1.11/$$

folyamatot. Könnyü meggondolni, hogy $\xi_{t\wedge\tau_m}$ Markovitása folytán a

$$P(\xi_{t'\wedge\tau_m}\in B \mid \xi_{t\wedge\tau_m}, \xi_0 = x) = P(\xi_{t'\wedge\tau_m}\in B \mid \xi_{t\wedge\tau_m})$$

egyenlőség fennáll tetszőleges $t'>t>0$ mellett. Másrészt $\{\xi_0 = x\}\in \mathcal{F}_{t\wedge\tau_m}$ minden $t\in R^+$ -ra, ezért /1.10/ figyelembevételével és hogy $\xi_{t\wedge\tau_m}$ mérhető $\mathcal{F}_{t\wedge\tau_m}$ -re,

$$E(V^x(\xi_{t\wedge\tau_m}) \mid \mathcal{F}^x_{t\wedge\tau_m}) = E(V(\xi_{t'\wedge\tau_m})\cdot \chi_{\{\xi_0=x\}} \mid \mathcal{F}^x_{t\wedge\tau_m}) =$$

$$= E(V(\xi_{t'\wedge\tau_m})\chi_{\{\xi_0=x\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau_m}) =$$

$$= E(V(\xi_{t'\wedge\tau_m}) \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau_m})\cdot\chi_{\{\xi_0=x\}}.$$

Az /1.8/-ból ezért következik, hogy

$$E(V^x(\xi_{t'\wedge\tau_m}) \mathcal{F}^x_{t\wedge\tau_m}) - V^x(\xi_{t\wedge\tau_m}) \le 0 \qquad /1.12/$$

Ezért alkalmazhatjuk az /1.9/-cel definiált valószinüségi mezőn a szupermartingál egyenlőtlenséget, ami épp a kivánt

$$P\{\sup_{0\le t<\infty} V(\xi_{t\wedge\tau_m}) \ge \lambda \mid \xi_0 = x\} \le \frac{E\,V^x(\xi_0)}{\lambda} = \frac{V(x)}{\lambda} \qquad /1.13/$$

összefüggést szolgáltatja.

3/-hoz azt kell csupán figyelembe venni, hogy $V(\xi_{t\wedge\tau_m}) < m$ minden $t\in R^+$ mellett a $\{\tau=\infty\}$ halmazon. Ezért /1.13/-ból $\lambda = m$ -re megkapjuk a kivánt

$$P(B_m \mid \xi_0 = x) \geq 1 - \frac{V(x)}{m} \qquad /1,14/$$

egyenlőtlenséget.

Az 1.2 tétel bizonyitása

Az aszimptotikus stabilitásra vonatkozó tétel előkészitéseként egy lemmát bizonyitunk be adott kiindulási feltételeknek eleget tevő trajektóriák egy halmazban "töltött" összidejéről.

<u>1.2 Lemma:</u> Legyen $G \subset R^n$ nyilt halmaz, és legyen τ a G -ből való első kilépési idő. Legyen továbbá V a G -n egy Ljapunov függvény / G nem szükségszerüen nivóhalmaza V-nek és V sem szükségszerüen korlátos G -n/ a Q_G^* -re nézve. Legyen továbbá $P \subset G$ egy olyan nyilt halmaz, melyen $Q_G^* V(x) \leq -b < 0$, $x \in P$. Ha a $\{\xi_{t \wedge \tau} \in P\}$ halmaz karakterisztikus függvényét ψ_P -vel jelöljük, akkor $x \in G$ mellett

$$E\left(\int_0^{t \wedge \tau} \psi_P \, ds \;\middle|\; \xi_0 = x \right) \leq \frac{V(x)}{b} \qquad /1.18/$$

minden $t \in R^+$ mellett

Bizonyitás: Alkalmazzuk az /1.8/ formulát az /1.9/-cel megadott valószinüségi mezőn értelmezett /1.11/ folyamatra, figyelembe véve, hogy /1.12/ következtében Q_a^* és $\{S^s\}_{s\in R^+}$ nem változnak. Ezért

$$V(x)-E\left(V^x(\xi_{t\wedge\tau})\,|\,\xi_0=x\right)=E\left(\int_0^{t\wedge\tau}Q_a^*V^x(\xi_{s\wedge\tau})\,ds\,|\,\xi_0=x\right)\geq$$
$$\geq b\,E\left(\int_0^{t\wedge\tau}\chi_P(w)\,ds\,|\,\xi_0=x\right). \qquad /1.19/$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $V\geq 0$, máris megkapjuk a kivánt állitást.

Az 1.2 tétel bizonyitása:

1/ Ha $k(x)\equiv 0$, $x\in G_m$, úgy az 1.2 tétel triviális következménye az 1.1 alaplemmának.

2/ Ellenkező esetben legyenek $d_0>d_1>d_2>0$ számok a hozzájuk tartozó $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ pedig a tétel feltételeiben biztositott pozitiv számok. Az $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ miatt

$$(P_m)_{\varepsilon_1}\supset(P_m)_{\varepsilon_2} \qquad /1.30/$$

és $x\in G_m\setminus(P_m)_{\varepsilon_1}$, $y\in(P_m)_{\varepsilon_2}$ esetén

$$\|x-y\|\geq\varepsilon_1-\varepsilon_2>0. \qquad /1.31/$$

Legyen most $x\in G_m$ rögzitett.

Képezzük a

$$\Omega\supset\{\xi_0=x\}\cap\{\xi_{t\wedge\tau_m}(w)\in G_m\setminus(P_m)_{\varepsilon_i}\}=A_{x,t,i} \qquad /1.32/$$

eseményt, jelöljük karakterisztikus függvényét $\chi(t,\varepsilon_i,w)$-val, $w\in\Omega$.

Képezzük a

$$T_x(t, \varepsilon_i, w) := \int_{t\wedge\tau_m}^{\tau_m} \chi(s, \varepsilon_i, w)\,ds \qquad /1.33/$$

valószinüségi változót, mely rögzitett w mellett a $C_m \setminus (P_m)_{\varepsilon_i}$ -ben töltött össz időt adja meg a $\xi_0 = x$ feltétellel.

Az 1.2 lemma következtében e valószinüségi változók 1 valószinüséggel véges értéküek az /1.9/-cel megadott feltételes valószinüségi mértékre nézve.

Ez egyúttal maga után vonja a

$$T_x(t, \varepsilon_i, w) \longrightarrow 0, \quad t \to \infty \qquad /1.34/$$

határérték létezését 1 valószinüséggel.

Átfogalmazva

$$P\left(\{w \mid \xi_t(w) \in C_m \setminus (P_m)_{\varepsilon_i},\ t > t_0(w),\ w \in B_m\} \mid B_m,\ \xi_0 = x\right) = 0, \qquad /1.35/$$

azaz minden B_m trajektória 1 valószinüséggel kilép a $(P_m)_{\varepsilon_2}$ -be.

Jelöljük $A_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ -val azon B_m -beli w -k halmazát, melyek trajektóriái oszcillálnak végtelenhez a $C_m \setminus (P_m)_{\varepsilon_1}$ és $(P_m)_{\varepsilon_2}$ között. Megmutatjuk, hogy

$$P(A_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \mid \xi_0 = x) = 0. \qquad /1.36/$$

Jelöljük $\rho_{\varepsilon_2}(x)$ -el az $x \in C_m$ pont távolságát $(P_m)_{\varepsilon_2}$ -től. Képezzük az

$$r_t(x) := \rho_{\varepsilon_2}(\xi_{t\wedge\tau_m})$$

valószinüségi változót. Ez r folytonossága miatt jobbról folytonos.

Képezzük az alábbi három Markov pontot:

$$\tau_t^0(\omega) = \inf\{s \mid r_{t+s}(\omega) \le 0\}$$

$$\tau_t^{\varepsilon_2}(\omega) = \inf\{s \mid r_{\tau_t^0+s}(\omega) \ge \varepsilon_2 - \varepsilon_1\}$$

$$\tau_t^{\varepsilon_1}(\omega) = \inf\{s \mid r_{\tau_t^{\varepsilon_2}+s}(\omega) \le 0\}. \qquad /1.37/$$

Az /1.35/ következtében mindhárom valószinüségi változó 1 valószinüséggel véges értékü.

A jobboldali folytonosság következtében minden $A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ -beli ω -ra $\tau_t^{\varepsilon_2}(\omega) < \tau_t^{\varepsilon_1}(\omega)$, sőt $s \in [\tau_t^{\varepsilon_2}(\omega), \tau_t^{\varepsilon_1}(\omega))$ esetén teljesül a

$$\xi_{s \wedge \tau_m}(\omega) \in G_m \setminus (P_m)_{\varepsilon_2} \qquad /1.38/$$

tartalmazás, utóbbi minden $\omega \in \Omega_x$, ha $\tau_t^{\varepsilon_2}(\omega) < \tau_t^{\varepsilon_1}(\omega)$.

Ezért az /1.33/ definició alapján

$$\tau_t^{\varepsilon_1}(\omega) - \tau_t^{\varepsilon_2}(\omega) \le T_x(t, \varepsilon_2, \omega), \quad \omega \in \Omega_x, \qquad /1.39/$$

és $\omega \in A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ esetén

$$r_{\tau_t^{\varepsilon_2}}(\omega) \ge \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad \text{valamint}$$

$$r_{\tau_t^{\varepsilon_1}}(\omega) = 0. \qquad /1.40/$$

A $\xi_{t \wedge \tau_m}$ folyamat sztochasztikusan folytonos a $\overline{G_m}$ -on / ξ_t csak G_m -en/, ami kompakt, ezért az 1.2 megjegyzés szerint itt egyenletesen is sztochasztikusan folytonos.

Ez azt jelenti, hogy a tetszőleges előre adott $\delta > 0$ -hoz megadható olyan $h > 0$, hogy a

$$\sup_{y\in G_m} P\left\{\sup_{t\le s\le t+h}\|\xi_{s\wedge\tau_m}-y\|\ge\varepsilon_1-\varepsilon_2 \,\middle|\, \xi_{t\wedge\tau_m}=y\right\}<\delta \qquad /1.41/$$

és $\xi_{t\wedge\tau_m}$ homogenitása folytán ez t-től független.

Válasszuk meg ezután az /1.39/-ben szereplő t-t olyan nagyra, hogy az /1.34/ alapján

$$P\{T_x(t,\varepsilon_2,\omega)\ge h \mid \xi_t=x\}<\delta \qquad /1.42/$$

legyen.

Bontsuk fel az $A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ halmazt az alábbiak szerint:

$$A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\left(A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\cap\{T_x(t,\varepsilon_2,\omega)\ge h\}\right)\cup\left(A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\cap\{T_x(t,\varepsilon_1,\omega)<h\}\right)=$$

$$=A_1\cup A_2 .$$

Az /1.42/ miatt

$$P(A^1 \mid \xi_0=x)<\delta \qquad /1.43/$$

Az

$$A^2\subset\{0<\tau_t^{\varepsilon_1}-\tau_t^{\varepsilon_2}<h\} \qquad /1.44/$$

halmaznak, az /1.39/ miatt.

Ámde

$$\{0<\tau_t^{\varepsilon_1}-\tau_t^{\varepsilon_2}<h\}\cap\{\xi_{\tau_t^{\varepsilon_2}\wedge\tau_m}=y\}\cap\{\tau_t^{\varepsilon}=s\}\subset$$

$$\subset\left\{\sup_{s\le\varrho<s+h}\|\xi_{\varrho\wedge\tau_m}-y\|\ge\varepsilon_2-\varepsilon_1\right\}\cap\{\xi_{s\wedge\tau_m}=y\} .$$

/1.40/ alapján ezért

$$P\left(\{0<\tau_t^{\varepsilon_1}-\tau_t^{\varepsilon_2}<h\} \mid \xi_{\tau_t^{\varepsilon_2}}=y,\ \tau_t^{\varepsilon}=s\right)<\delta,$$

méghozzá y és s-ben egyenletesen.

Igy

$$P(\{0<\tau_t^{\varepsilon_1}-\tau_t^{\varepsilon_2}<h\} \mid \xi_0=x)=$$

$$=\int_{G_m}\int_t^{\infty} P(0<\tau_t^{\varepsilon_1}-\tau_t^{\varepsilon_2}<h \mid y,s)\,P(dy,ds \mid \xi_0=x)<\delta . \qquad /1.45/$$

Tehát

$$P(A^2 \mid \xi_0=x)<\delta \qquad /1.46/$$

/1.44/ miatt, és ezért

$$P(A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \mid \xi_0=x)<2\delta \qquad /1.47/$$

/ /1.43/ és /1.46/ miatt/.

Mivel δ tetszőleges pozitiv szám volt,

$$P(A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \mid \xi_0=x)=0. \qquad /1.48/$$

következik.

Ez azt jelenti, hogy a B_m -beli trajektóriákra

$$P(\xi_t \to P_m \mid B_m)=1 \qquad /1.49/$$

és

$$P(B_m \mid \xi_0=x)\geq 1-\frac{V(x)}{m} . \qquad /1.50/$$

Ez pedig maradéktalanul bizonyitja az 1.2 tételt.

Az 1.6 tétel bizonyitása

Az 1.2 tétel bizonyitásában beláttuk, hogy $V^x(\xi_{t\wedge\tau_m})$ szupermartingál.

Az /1.12/-ben irjuk be az egyenlőség jobb oldalát, figyelembe véve $\xi_{t\wedge\tau_m}$ markovitását, a következőt kapjuk:

$$E(V^x(\xi_{t'\wedge\tau_m}) \mid \xi_{t\wedge\tau_m})-V^x(\xi_{t\wedge\tau_m})=E\left(\int_0^{t'-t}(Q_m^* V^x)(\xi_{s\wedge\tau_m})ds \,\middle|\, \xi_0=x\right)$$

Felhasználva a 2/ feltételünket, a feltételes várhatóérték-képzést az /1.8/ előzménye szerint az idő szerinti integrálással felcserélve /a Fubini tétel ad erre lehetőséget/:

$$E\left(V^x(\xi_{t'\wedge\tau_m}) \mid \xi_{t\wedge\tau_m}\right) - V^x(\xi_{t\wedge\tau_m}) \leq$$
$$\leq -\alpha \int_0^{t'-t} E\left(V^x(\xi_{(t+s)\wedge\tau_m}) \mid \xi_{t\wedge\tau_m}\right) ds .$$

Legyen most t=0, ekkor azt kapjuk , hogy

$$E\left(V^x(\xi_{t'\wedge\tau_m}) \mid \xi_0 = x\right) - V(x) \leq -\alpha \int_0^{t'-t} E\left(V^x(\xi_{s\wedge\tau_m}) \mid \xi_0 = x\right) ds$$

Az $E\left(V^x(\xi_{t'\wedge\tau_m}) \mid \xi_0 = x\right)$ függvényre alkalmazhatjuk a Gronwall-Bellman egyenlőtlenséget, és igy nyerjük az

$$E\left(V^x(\xi_{t'\wedge\tau_m}) \mid \xi_0 = x\right) < V(x)\, e^{-\alpha t'} \qquad /1.57/$$

becslést. Ha ezt most alkalmazzuk a $V^x(\xi_{t'\wedge\tau_m})$ szupermartingálra, akkor az /1.9/-cel megadott valószinüségi mezőn érvényes a

$$P\left\{\sup_{T\leq t<\infty} V(\xi_{t\wedge\tau_m}) \geq \lambda \mid \xi_0 = x\right\} \leq \frac{E\left(V^x(\xi_{T\wedge\tau_m}) \mid \xi_0 = x\right)}{\lambda} \leq$$
$$\leq \frac{V(x)\, e^{-\alpha T}}{\lambda} \qquad /1.58/$$

becslés. Figyelembe véve, hogy

$$P\left(\{\xi_{t\wedge\tau_m} \neq \xi_t\} \mid \xi_0 = x\right) \leq \frac{V(x)}{m} ,$$

könnyen látható, hogy:

$$P\left(\sup_{T\leq t<\infty} V(\xi_t) \geq \lambda \mid \xi_0 = x\right) \leq \frac{V(x)}{m} + \frac{V(x)\, e^{-\alpha T}}{\lambda} \qquad /1.59/$$

ami a tételt bizonyitja.

2. INHOMOGÉN MARKOV FOLYAMATOK SZTOCHASZTIKUS LJAPUNOV FÜGGVÉNYEI

2.1 Homogén és inhomogén Markov folyamatok kapcsolata

Tekintsük a $\{\xi_t\}$ n-dimenziós Markov folyamatot a $P(t,x,t',A)$, $(t,x,t',A) \in R^+ \times R^n \times R^+ \times \mathcal{B}(R^n)$ átmenet valószinüségekkel. Képezzük a

$$\tilde{\xi}_t = (\xi_t, t) \qquad /2.1/$$

$n+1$ dimenziós folyamatot. A 2.1 pontban azt fogjuk megmutatni, hogy $\tilde{\xi}_t$ bevezetésével tetszőleges kiindulási ξ_t folyamatból homogén Markov folyamatot kapunk, amelyre tehát bizonyos módositásokkal természetesen, de alkalmazhatók az 1. fejezet eredményei. Módositások azért kellenek, mert 2.1-ben az $n+1$ -dik dimenziót az idő szolgáltatja, azaz az 1. fejezetbeli tételeket időtől függő Ljapunov függvényekre kell kimondani. A 2.2 pontban tehát az inhomogén Markov folyamatok stabilitásával illetve az időtől függő Ljapunov függvénnyel rendelkező homogén Markov folyamatok stabilitásával foglalkozunk.

Nézzük meg először a $\tilde{\xi}_t$ folyamat tulajdonságait. A folyamat átmenet valószinüségei a következők lesznek: $t' > t$, $A \in \mathcal{B}(R^n)$ mellett

$$P(\tilde{\xi}_{t'} \in A \mid \tilde{\xi}_t = (t,x)) = P(t, x, t', \{t'\} \times R^n \cap A), \qquad /2.2/$$

ahol 2.2 jobb oldalán a $\{\xi_t\}_{t \in R^+}$ inhomogén Markov folyamat átmenetvalószinüsége áll. Vezessük be az $y = (t,x) \in R^{n+1}$ jelölést. Ezzel a jelöléssel és mivel ξ_t Markov folyamat, fennáll a

$$P(\tilde{\xi}_{t'} \in A \mid \tilde{\xi}_t = y, \tilde{\xi}_{t_1} = y_1, \ldots, \tilde{\xi}_{t_k} = y_k) = P(t, x, t', \{t'\} \times R^n \cap A) \qquad /2.3/$$

összefüggés, azaz tetszőleges $t > t_1 > t_2 > \ldots \geq 0$ feltétel-rendszert előirva, a /2.3/ valószinüség csak t-től függ, tehát $\tilde{\xi}_t$ Markov folyamat. De $\tilde{\xi}_t$ homogén Markov folyamat is, ugyanis legyen $A \in \mathcal{B}(R^n)$, $\tilde{\xi}_t = y = (x, t)$ és $t' = s + t$. Akkor

$$P(y, t', \{t'\} \times R^n \cap A) = P(y, P_r(y) + s, \{P_r(y) + s\} \times R^n \cap A), \qquad /2.4/$$

ahol $P_r(x,t) := t$, /tehát ez az R^{n+1} -ben az utolsó komponensre való vetitést jelenti/. /2.4/-ből viszont

$$P(\tilde{\xi}_{t'} \in A \mid \tilde{\xi}_t = y) = P(y, t' - t, A)$$

következik, vagyis a $\tilde{\xi}_t$ folyamat átmenet valószinüségei valóban csak az időkülönbségtől függenek. Nyilvánvaló, hogy ha ξ_t erős értelemben vett Markov folyamat volt, akkor $\tilde{\xi}_t$ is az lesz, és ha ξ_t jobbról folytonos, akkor $\tilde{\xi}_t$ is jobbról folytonos lesz.

Vizsgáljuk meg most, hogyan változik meg $\tilde{\xi}_t$ infinitezimális generátora a ξ_t folyamatéhoz képest.

Legyen Q_t^* a ξ_t folyamat infinitezimális generátora és vegyünk egy $f \in B(R^{n+1}, \mathcal{B}(R^{n+1}))$ függvényt, amelyről tegyük fel, hogy az $f_t(x) = f(x,t)$ függvény minden $t \in R^+$ mellett a Q_t^* értelmezési tartományában van és minden rögzitett $t \in R^+$ mellett t-ben egyenletesen differenciálható.

Ha felirjuk az alábbi különbségi hányadost:

$$\frac{E\left(f(\tilde{\xi}_h) \mid \xi_0 = y\right) - f(y)}{h} = \frac{\int_{R^n} f(z, t+h) P(t, x, t+h, dz) - f(y)}{h} =$$

$$= \frac{\int_{R^n} f(z,t) P(t,x,t+h,dz) - f(x,t)}{h} + \frac{\int_{R^n} \left(f(z,t+h) - f(z,t)\right) P(t,x,t+h,dz)}{h} \qquad /2.5/$$

a

$$Q^*_{\tilde{\xi}} f = Q^*_t f_t + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad /2.6/$$

összefüggést kapjuk. Ugyanis a /2.5/ összeg első tagja feltevéseink mellett $(Q^*_t f_t)(x)$ -hez tart $h \to 0$ mellett, a második tag pedig $P(t,x,t+h,A) \to \chi_A(x)$ miatt és az egyenletességi feltételek következtében /2.6/ második tagját adja.

A $\tilde{\xi}_t$ folyamat trajtktóriáinak viselkedése szempontjából számunkra az olyan $G_0 \subset R^{n+1}$ nyilt halmazok érdekesek amelyek előállnak

$$G_0 = G \times R^1, \quad G \subset R^n, \qquad G \text{ nyilt} \qquad /2.8/$$

alakban. Jelöljük τ_G -vel a $\tilde{\xi}_t$ folyamatnak a G_0 halmazból való első kilépési idejét, akkor a

$$\tilde{\xi}_{t \wedge \tau_{G_0}} = \left(\xi_{t \wedge \tau_{G_0}}, t \wedge \tau_{G_0}\right)$$

megállitott folyamatot kapjuk. Ha a $\tilde{\xi}_t$ átmenet valószinüségei a 0-ban differenciálhatók, akkor a megállitott folyamat infinitezimális generátorára a

$$\left(Q^*_{\tilde{\xi}_{t \wedge \tau_{G_0}}} f\right)(x,t) = \chi_G(x) \left(Q^*_{\tilde{\xi}} f\right)(x,t) \qquad /2.9/$$

összefüggés áll fenn, egyébként /2.9/ jobb oldalába a $\chi_{G_0}(x,t)$ szorzó kerül.

A jelölések egyszerüsitése érdekében a $\tilde{\xi}_t$ infinitezimális generátorát $\tilde{Q}^*$ -gal, a megállitott folyamatét $\tilde{Q}^*_\tau$ -val illetve $\tilde{Q}^*_G$ -vel jelöljük.

Itt tárgyalunk még egy az aszimptotikus viselkedés szempontjából igen fontos feltételt az inhomogén Markov folyamatok Ljapunov függvényeinek nivóhalmazaival kapcsolatban.

Legyen $V: R^{n+1} \longrightarrow R^+$ folytonos, az egész téren értelmezett, nem szükségképpen korlátos függvény, $m > 0$ tetszőleges rögzitett valós szám. Képezzük a

$$G_m := \{(x,t) | V(x,t) < m\}$$

halmazt. Jelöljük a $\tilde{\xi}_t$ folyamatnak a G_m -ből való első véletlen kilépési idejét τ_m -el és jelentse $\tilde{Q}^*_m$ a $\tilde{\xi}_t$ folyamat infinitezimális generátorát.

<u>2.1 Lemma</u> Ha $\chi_{G_m} \cdot V$ benne van a $\tilde{Q}^*_m$ értelmezési tartományban és

$$\left(\tilde{Q}^*_m \left(\chi_{G_m} \cdot V \right) \right) \leq 0, \qquad /2.11/$$

valamint G_m nem üres, akkor

$$P_r\left(G_m\right) \supset [T, \infty)$$

valamilyen alkalmas T -vel. /$P_r(x,t) = t$ ha $(x,t) \in R^n \times R^1$./

<u>2.1 Következmény</u> A 2.1 lemma azt jelenti, hogy ha $V(x,t)$ egy inhomogén Markov folyamat Ljapunov függvénye, akkor a $G_m = \{(x,t) | V(x,t) < m\}$ nem üres nyilt halmaz nem lehet korlátos, és ha egy $(x,t) \in R^{n+1}$ pont beletartozik, akkor

$$P_r(G_m) \supset [t, \infty).$$

2.2 Következmény Ha az 1.1 pontban megadott $V: R^n \to R^1$ függvény helyett egy időtől is függő $V\ R^n \times R^1 \to R^+$ Ljapunov függvényt veszünk, amelyre teljesül, hogy a $G_m := \{(x,t) \mid V(x,t) < m\}$ halmazzal megállitott $\tilde{\xi}_{t \wedge \tau_n}$ folyamat $\tilde{Q}^*_m$ infinitezimális generátorával minden $(x,t) \in G_m$ -re fennáll, hogy

$$\left(\tilde{Q}^*_m V\right)(x,t) \leq 0, \qquad /2.18/$$

akkor az alábbi kijelentést tehetjük:

Az időtől is függő Ljapunov függvények és az inhomogén Markov folyamatok Ljapunov függvényeinek vizsgálata ugyanahhoz a problémához vezet.

2.2 Inhomogén Markov folyamatok stabilitása

Ebben a pontban az 1. fejezetben tárgyalt stabilitási tételek megfelelőit adjuk meg az inhomogén Markov folyamatok esetére, vagyis a 2.2 következmény figyelembevételével időtől is függő Ljapunov függvényekre.

Kezdjük az 1.1 alaplemma átfogalmazásával.

Tekintsük a $\{\xi_t\}_{t \in R^+}$ nem szükségképpen homogén n-dimenziós jobbról folytonos erős értelemben vett Markov folyamatot. Legyen $\tilde{\xi}_t$ a 2.1 pontban leirt homogén Markov folyamat és vegyük a

$$V : R^{n+1} \longrightarrow R^+ \qquad /2.19/$$

folytonos függvényt a $G_m \subset R^{n+1}$

$$G_m = \{(x,t) \mid V(x,t) < m\} \qquad /2.20/$$

nivóhalmazával. Legyen $T \geq 0$ olyan szám, melyre létezik $x \in R^n$, hogy

$$(x,t) \in G_m \qquad /2.21/$$

Jelöljük τ_m^T -vel a $\tilde{\xi}_{T+s}$ folyamat G_m-ből való első kilépési idejét és képezzük a

$$\tau_m = T + \tau_m^T \qquad /2.22/$$

Markov pontot valamint $t \geq T$ mellett a

$$\tilde{\xi}_{t\wedge\tau_m} = \tilde{\xi}_{t\wedge(T+\tau_m^T)} \qquad /2.23/$$

megállitott folyamatot. Legyen $\tilde{Q}_m^*$ a $\tilde{\xi}_{t\wedge\tau_m}$ folyamat infinitezimális generátora és tegyük fel, hogy V benne van a $\tilde{Q}_m^*$ értelmezési tartományában.

<u>2.2 Alaplemma</u> Tegyük fel, hogy

$$(\tilde{Q}_m^* V)(y) \leq 0 \quad \text{minden } y \in G_m \qquad /2.24/$$

Akkor

1/ A $\{V(\tilde{\xi}_{t\wedge\tau_m}), \mathcal{F}_{t\wedge\tau_m}\}_{t\geq T}$ folyamat jobbról folytonos nem negativ szupermartingál.

2/ $\lambda < m$ és $(x,T) \in G_m$ esetén

$$P\left\{\sup_{T\leq t<\infty} V(\tilde{\xi}_{t\wedge\tau_m}) \geq \lambda \mid \tilde{\xi}_T = (x,T)\right\} \leq \frac{V(x,T)}{\lambda} \qquad /2.25/$$

3/ Ha $B_m = \{\omega \mid \tilde{\xi}_t \in G_m,\ t \geq T\}$ akkor

$$P(B_m \mid \tilde{\xi}_T = (x,T)) \geq 1 - \frac{V(x,T)}{\lambda} \qquad /2.26/$$

4/ Minden $\omega \in B_m$ mellett $V(\tilde{\xi}_t(\omega)) \to C(\omega)$, azaz

$$P\left(V(\tilde{\xi}_t) \to c \mid B_m\right) = 1, \quad t \to \infty. \qquad /2.27/$$

A 2.2 alaplemma nyilvánvaló következménye az 1.1 alaplemmának, ez utóbbit az $\eta_s = \tilde{\xi}_{T+s}$ folyamatra kell alkalmazni, a megállitott folyamat $\tilde{\xi}_{t \wedge \tau_m} = \eta_{s \wedge \tau_m - T}$ lesz.

Elnevezés

A /2.19/-ben megadott és /2.24/-et teljesitő V függvényt a $\{\xi_t\}_{t \in R^+}$ folyamat sztochasztikus Ljapunov függvényének nevezzük.

Az 1.1 tétel is szinte változatlanul érvényes időtől függő Ljapunov függvények esetén is.

2.1 Tétel: Legyen V a $\{\xi_t\}$ jobbról folytonos erős értelemben vett Markov folyamat olyan Ljapunov függvénye, amelyre teljesül a $V(0,t) = 0$ minden $t \in R$ mellett. Ekkor a rendszer stabil a $(G_r, G_m, 1 - \frac{r}{m})$ hármasra nézve tetszőleges $r \le m$, $t \ge T$ -re, ha $(x,T) \in G_r$.

Ezenkivül majdnem minden $\omega \in B_m$ esetén $V(\tilde{\xi}_{t \wedge \tau_m}(\omega)) \to C(\omega) \le m$, $t \ge T$, $t \to \infty$ mellett.

Az 1.2 tétel feltételei a 2.1 lemma miatt időtől függő Ljapunov függvények esetében nem biztosithatók, a 2.1 következmény szerint ugyanis G_m nem korlátos halmaz. Ezért az 1.2 és 1.4 tételek analógjait egy tételben mondhatjuk ki a következő feltételek mellett:

Legyen $\overline{G_r(0)} \subset R^n$ az n-dimenziós térben 0 körüli zárt r-sugarú gömb, és jelöljük H_r -el a

$$H_r := \overline{G_r(0)} \times R \subset R^{n+1} \qquad /2.28/$$

zárt halmazt.

A/ Legyen a ξ_t folyamatból képezett $\tilde{\xi}_t$ folyamat egyenletesen sztochasztikusan folytonos minden H_r halmazon r=1,2,..., és

$$P\left(\| \xi_t(w) \| \to \infty,\ t \to \infty,\ w \in B_m \right) = 0 \qquad /2.29/$$

B/ Legyen a ξ_t folyamatból képezett $\tilde{\xi}_t$ folyamat a ξ_t Ljapunov függvényével definiált $G_m \subset R^{n+1}$ halmazon egyenletesen sztochasztikusan folytonos.

<u>2.2 Tétel:</u> Legyen a ξ_t folyamat Ljapunov függvénye V a $G_m \subset R^{n+1}$ halmazon. Legyen $T \in R^+$ olyan, hogy létezik $x \in R^n$ amelyre $(x,T) \in G_m$.

Teljesülnek az alábbi feltételek:

1/ A ξ_t folyamat teljesitse az A/ vagy B/ feltételt.

2/ Legyen megadható egy $k_1(x) \geq 0$ függvény úgy, hogy

$$-\left(\tilde{Q}_m^* V \right)(x,t) = k(x,t) \geq k_1(x) \geq 0 \qquad /2.29/$$

teljesüljön minden $(x,t) \in G_m$ esetén.

3/ Definiáljuk a $P_m \subset R^n$ halmazt a következőképpen:

$$P_m := \{ x \mid k_1(x) = 0 \} \cap \{ x \mid V(x,t) < n \text{, valamilyen } t > T \}$$

/2.30/

4/ Tegyük fel, hogy megadható olyan $d_0 > 0$ és minden $d_0 > d > 0$ -hoz olyan $\varepsilon_d > 0$ /az A/ feltétel esetén $d_{0,r} > 0$ és $\varepsilon_{d,r} > 0$/, hogy

$$k_1(x) \geq d$$

minden $x \in \{ z \mid z \in R^n,\ V(z,t) < m$ alkalmas $t > T$ -re és $\varrho(z, P_m) \geq \varepsilon_d \}$ esetén /az A/ feltétel esetén még az $\|x\| \leq r$ feltételre is szükség van/.

Akkor

$$P\left(\xi_t \to P_m \mid \tilde{\xi}_T = (x, T) \right) \geq 1 - \frac{V(x,T)}{m} \qquad /2.31/$$

A 2.2 tétel az 1.4 tétel közvetlen következménye, ha ez utóbbit az $\eta_s := \tilde{\xi}_{T+s}$ folyamatra alkalmazzuk. A bizonyitáshoz szükséges $\tilde{P}_m$ halmazt a /2.30/-cal definiált P_m -ből $\tilde{P}_m = (P_m \times R) \cap G_m$ alakban nyerjük.

A V $R^{n+1} \to R^+$ folytonos függvény legyen most minden $m = 1, 2, \ldots$ mellett a G_m halmazon a $\{\xi_t\}$ $t \in R^+$ erős értelemben vett, jobbról folytonos Markov folyamat Ljapunov függvénye. Vezessük be a következő jelöléseket.

1/ $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$.

2/ Tegyük fel, hogy $0 \leq k_{m,1}(x) \leq k_m(x,t) := (\tilde{Q}^*_m V)(x,t)$ minden $(x,t) \in G_m$ mellett.

3/ $(x,T) \in G_m$ -re definiáljuk a következő halmazt:

$$P_m^T = \{ x \mid k_{m,1}(x) = 0 \} \cap \{ x \mid V(x,t) < m, \text{ valamilyen } t > T \text{ -re} \} \qquad /2.32/$$

4/ Legyen $P^T = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m^T$.

Ezekután kimondhatjuk az 1.3 tétel inhomogén változatát, amely azonnal következik a 2.2 tételből.

<u>2.3 Tétel</u> Tegyük fel, hogy a 2.2 tétel feltételei minden $m = 1, 2, \ldots$ mellett teljesülnek. Akkor tetszőleges

$(z,t)\in G$ esetén

$$P(\xi_t \to P^T \mid \xi_T = z) = 1 . \qquad /2.33/$$

Az 1.6 exponenciális sztochasztikus stabilitási tétel inhomogén változatához vegyük a ξ_t folyamat $V: R^{n+1} \to R^+$ Ljapunov függvényét és jelöljük P^T -vel a következő R^n -beli halmazt:

$$P^T = \bigcup_{S>T} \bigcap_{s}^{\infty} \{x \mid V(x,s) = 0\}, \qquad /2.34/$$

ahol $T \geq 0$ olyan, hogy létezik $z \in R^n$ melyre $(z,T)\in G_m$ Nyilvánvaló, hogy $P^T \neq 0$, ha van olyan $x \in R^n$ és olyan S_0 hogy $V(x, s) = 0$ $s>S_0$ mellett.

<u>2.4 Tétel</u> Tegyük fel, hogy a 2.1 tétel feltételei teljesülnek, valamint

1/ $P^T \neq 0$

2/ $(\tilde{Q}_m^* V)(x,t) \leq -\alpha V(x,t)$ valamely $\alpha > 0$ valós számra minden $(x,t)\in G_m$ mellett.

Akkor

1/

$$P\left(\left\{\sup_{T+S\leq t<\infty} V(\tilde{\xi}_t) \geq \lambda\right\} \Big| \tilde{\xi}_T = (x,T)\right) \leq \frac{V(x,T)}{m} + \frac{V(x,T)\,e^{-\alpha s}}{\lambda} \qquad /2.35/$$

2/ Ha a tétel 2/ feltétele tetszőleges $m > 0$ -ra fennáll, akkor

$$P\left(\left\{\sup_{T+S\leq t<\infty} V(\tilde{\xi}_t) \geq \lambda\right\} \Big| \tilde{\xi}_T = (x,T)\right) \leq \frac{V(x,T)\,e^{-\alpha S}}{\lambda} \qquad /2.36/$$

3/

$$P\left(\{\xi_t \to P^T\} \mid \tilde{\xi}_T = (x,T)\right) \geq 1 - \frac{V(x,T)}{m} \qquad /2.37/$$

A 2.4 tétel következik az 1.6 tételből.

2.1 Megjegyzés Természetesen az 1.8 Megjegyzés itt is érvényes. Az $\inf_{(x,t)\in G_m} V(x,t)=0$ szükséges feltétele annak, hogy 2/ biztositsa az aszimptotikus stabilitást.

2.3 A 2.1 lemma bizonyitása

Tegyük fel, hogy a $Pr(G_m)$ nem összefüggő. Miután a G_m nyilt, vetülete is nyilt lesz. /A projekció nyilt leképezés/. Ámde az egyenesen minden nyilt halmaz előáll megszámlálható diszjunkt nyilt intervallum egyesitéseként. Vegyünk ki egy ilyen intervallumot a $Pr(G_m)$ -ből.

Ha ezt (a,b) -vel jelöljük, $0<a<b$ véges pozitiv számok, akkor biztos, hogy $R^n \times \{b\} \cap G_m = \phi$

Legyen $a<T<b$ rögzitett időpont. A $\tilde{\xi}_{T+s}$ homogén Markov folyamatot s-sel mint időparaméterrel képezve az átmeneti valószinüségek változatlanok maradnak. Jelöljük a G_m -ből való véletlen első kilépési időt τ_m^T -el. Világos, hogy a jobbról való folytonosság miatt $\tau_m^T \neq 0$ hiszen $0<T<b$ és

$$P\{\tau_m^T \leq b-a \mid \tilde{\xi}_T = y \in G_m\} = 1. \qquad /2.13/$$

Továbbá a $\tilde{\xi}_{T+s\wedge\tau_m^T}$ homogén Markov folyamatra alkalmazhatjuk az 1.1 alaplemmát, hiszen a bevezetett V függvénynyel valamennyi feltétele teljesül. Ezért $V(\tilde{\xi}_{T+s\wedge\tau_m^T})$ nem negativ jobbról folytonos szupermartingál, amelyre /2.13/ miatt

$$P\left(\lim_{s\to\infty} V(\tilde{\xi}_{T+s\wedge\tau_m^T}) = V(\tilde{\xi}_{T+\tau_m^T}) \geq m \mid \tilde{\xi}_T = y\right) = 1 \qquad /2.16/$$

teljesül, ami viszont ellentmond az alaplemma

$$P\left(\sup_{T\le s<\infty} V\left(\tilde{\xi}_{T+s\wedge\tau_m^T}\right)\ge\lambda \;\middle|\; \tilde{\xi}_T=y\right)\le\frac{V(y)}{\lambda}=\frac{V(x,T)}{\lambda} \qquad /2.17/$$

állitásának, hiszen $V(x,T)<m$ és legyen $m>\lambda>V(x,T)$.

3. DISZKRÉT MARKOV FOLYAMATOK STABILITÁSA

3.1 Homogén és inhomogén diszkrét Markov folyamatok

Tekintsük a $\{\xi_i\}_{i\in I^+}$ n-dimenziós Markov folyamatot, ahol I^+ a nemnegativ egészek halmazát jelenti. A $\tilde{\xi}_i=(\xi_i,i)$-vel megadott folyamatnál a 2.1 pontban leirtakhoz hasonlóan belátható, hogy homogén Markov folyamat. Ugyanis, jelentse P az eredeti ξ_t folyamat átmenet valószinüségeit és vegyünk egy $B\subset \mathcal{B}(R^n\times I^+)$ Borel halmazt. B előállitható az $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_j\times\{j\}$ alakban, ahol $B_j\subset R^n$, $j=1,2,\dots$ alkalmas Borel halmazok.

Legyen $i,j\in I^+$ és $j>i$ mellett $j-i=k$, valamint $Pr_1(x,i)=x$, $Pr_2(x,i)=i$, $(x,i)\in R^n\times I^+$, akkor az $(x,i)=y$ jelöléssel

$$P(\tilde{\xi}_j\in B\,|\,\xi_i\in(x,i))=P((\xi_j,j)\in B\cap(R^n\times\{j\})\,|\,\tilde{\xi}_i=(x,i))=$$
$$=P(Pr_2(y),Pr_1(y),Pr_2(y)+k,\ Pr_1(B\cap(R^n\times\{Pr_2(y)+k\}))=$$
$$=\tilde{P}(y,k,B). \qquad /3.1/$$

Ha most a $V: R^n\times I^+\to R^+$ folytonos függvény integrálható minden $y\in R^n\times I^+$ mellett, akkor az is könnyen látható, hogy

$$\int_{R^n\times I^+} V(z)\,\tilde{P}(y,1,dz)=\int_{R^n} V(u,i+1)\,P(i,x,i+1,du), \qquad /3.2/$$

ahol $z=(u,k)\in R^n\times I^+$ és $y\in(x,i)\in R^n\times I^+$.

A diszkrét idejü Markov folyamatok esetében a ξ_t folyamat bevezetésére nem elsősorban a homogenitás miatt van szükség, hanem azért mert egy $V: R^n\times I^+\to R^+$ függvény

$$G_m = \{(x,i) \mid V(x,i) < m\}, \quad m > 0 \tag{3.3}$$

nivóhalmazából való kilépéssel megállitott folyamat igy egyszerübben kezelhető.

Pontosabban legyen $k \in I^+$, amelyhez létezik $x \in R^n$ hogy $(x,k) \in G_m$. Képezzük ekkor az $\eta_\ell = \tilde{\xi}_{k+\ell}$ folyamatot, ami nyilvánvalóan homogén Markov folyamat és vegyük ennek τ_m^k véletlen első kilépési idejét a G_m halmazból.

Legyen ezután

$$\eta_{\ell \wedge \tau_m^k} = \tilde{\xi}_{(k+\ell)\wedge(k+\tau_m^k)} = \tilde{\xi}_{(k+\ell)\wedge \tau_m}, \quad \tau_m := k + \tau_m^k$$

Erről a folyamatról tudjuk, hogy homogén Markov folyamat, és

$$\eta_{\ell \wedge \tau_m^k}(\omega) = \begin{cases} \eta_\ell(\omega) & \ell < \tau_m^k(\omega) \\ \eta_{\tau_m^k} & \ell \geq \tau_m^k(\omega) \end{cases} \tag{3.4}$$

Ha $y \in G_m$, akkor /3.4/ szerint $\{\tilde{\xi}_{(k+\ell)\wedge\tau_m} = y\} = \{\tilde{\xi}_{k+\ell} = y\}$, emiatt $\tau_m > (k+\ell)$. Ebből viszont $\omega \in \{\tilde{\xi}_{k+\ell} = y\}$ esetén

$$\tilde{\xi}_{(k+\ell+1)\wedge\tau_m}(\omega) = \tilde{\xi}_{k+\ell+1}(\omega) \tag{3.5}$$

következik, vagyis a következő eredményhez jutunk:

<u>3.1 Lemma</u> Az átmenetvalószinüségekre $y \in G_m$ esetén a következő összefüggés áll fenn:

$$P(\tilde{\xi}_{(k+\ell+1)\wedge\tau_m} \in B \mid \tilde{\xi}_{(k+\ell)\wedge\tau_m} = y) = P(\tilde{\xi}_{(k+\ell+1)} \in B \mid \tilde{\xi}_{k+\ell} = y) =$$

$$= P(y,1,B). \tag{3.6}$$

3.2 Diszkrét Markov folyamatok Ljapunov függvényei

3.2 Alaplemma: Tekintsük a $\{\xi_i\}_{i\in I^+}$ diszkrét Markov folyamatot, és a $V: R^n \times I^+ \longrightarrow R^+$ folytonos függvényt. Legyen G_m a V-hez 3.3-mal rendelt nivóhalmaz, és teljesüljön minden $y \in G_m$-re az

$$\int_{R^n \times I^+} V(z)\, \tilde{P}(y, 1, dz) - V(y) = -k(y) \leq 0 \qquad /3.7/$$

feltétel. Ha ekkor $k \in I^+$ olyan szám, melyre $(x,k) \in G_m$, akkor

1/ $$P\left(\sup_{k\leq n<\infty} V(\xi_{n,n}) \geq m \mid \xi_k = x\right) \leq \frac{V(x,k)}{m} \qquad /3.8/$$

2/ Van olyan $0 \leq \nu < m$ valószinüségi változó, hogy

$$P\left(V(\xi_{n,n}) \to \nu,\ n\to\infty \mid \xi_k = x\right) \geq 1 - \frac{V(x,k)}{m} \qquad /3.9/$$

3/ $$P\left(k(\xi_{n,n}) \to 0,\ n\to\infty \mid \xi_k = x\right) \geq 1 - \frac{V(x,k)}{m}. \qquad /3.10/$$

3.1 Következmény: Ha egy V Ljapunov függvényre a /3.7/-tel definiált k függvény egy $M \subset G_m$ halmazon teljesiti a

$$k(y) > d > 0 \qquad /3.19/$$

feltételt, akkor e halmazba $\tilde{\xi}_t$ trajektóriái $1 - \frac{V(x,k)}{m}$-nél nagyobb valószinüséggel ω-tól függő véges számszor metszenek bele.

<u>3.2 Következmény:</u> Ha V teljesiti a 3.1 alaplemma feltételeit, akkor nem lehet $k < i \in I^+$ olyan, hogy $G_m \cap (R^n \times \{k\}) = \Phi$ ha $G_m \neq \Phi$. Ugyanis ekkor $(x,k) \in G_m$ esetén $P\{\tau_m < \infty \mid \hat{\xi}_k = y\} = 1$ lenne, ami ellentmond az 1.1 alaplemmaának, mely szerint $P\{\tau_m = \infty \mid \hat{\xi}_k = y\} \geq 1 - \frac{V(x,k)}{m} > 0$.

<u>Elnevezés:</u> Ha egy $V: R^n \times I^+ \to R^+$ folytonos függvényre minden $i \in I^+$ mellett a $\{\xi_j\}_{j \in I^+}$ folyamat átmeneti valószinüségeivel teljesül az $x \in \{z \mid V(z,i) < m\}, m > 0$ halmazon az

$$\int_{R^n} V(z, i+1) P(i, x, i+1, dz) - V(x, i) \leq 0 \qquad /3.22/$$

egyenlőtlenség, akkor V-t a ξ folyamat Ljapunov függvényének nevezzük. /3.2/ miatt e feltétel nyilvánvalóan ekvivalens a /3.7/ feltétellel.

Ezután a 3.1 alaplemma felhasználásával sorra kimondhatjuk homogén és inhomogén esetben az 1. és 2. pontok eredményeit.

<u>3.1a Tétel:</u> Legyen $\{\xi_i\}_{i \in I^+}$ homogén Markov folyamat, és legyen $V: R^n \to R^+$ a folyamat i-től független Ljapunov függvénye, melyre $V(0) = 0$, azaz $0 \in G_m$. Ekkor a rendszer a $(G_r, G_m, 1 - \frac{r}{m})$ hármasra nézve stabil, továbbá $V(\xi(w)) \to C(w) \leq m$ majdnem minden $w \in B_m$-re, $B_m = \{w \mid \tau_m(w) = \infty\}$.

Ha még $V(x) \neq 0$ is teljesül $x \neq 0$ mellett, akkor a 0 1 valószinüséggel stabil.

A tétel teljes egészében következik a 3.2 alaplemmából. Annyit jegyezzünk meg csupán, hogy itt T=0 vehető, mert V nem függ i-től.

<u>3.1b Tétel:</u> Legyen $V: R^n \times I^+ \to R^+$ a $\{\xi_i\}$ $i \in I^+$ homogén vagy inhomogén Markov folyamat olyan Ljapunov függvénye, melyre $V(0,i)=0$, $i=0,1,2,\dots$ mellett. Ekkor a folyamat stabil a $(G_r, G_m, 1-\frac{r}{m})$ hármasra nézve, továbbá $V(\xi_k, k) \to c(w) \leq m$ majdnem minden $w \in B_m$-re nézve.

Ha még az is igaz, hogy $V(x,i) \neq 0$, $i \in I^+$, $x \neq 0$ esetén, és V i-ben egyenletesen folytonos a 0-ban, akkor a 0 1 valószinüséggel stabil.

Ez a tétel szintén a 3.2 alaplemma következménye. T=0 itt is választható, mert $(0,0) \in B_m$ $V(0,0)=0$ miatt.

Ezután az aszimptotikus stabilitási tételek következnek.

<u>3.2a Tétel:</u> Legyen a $\{\xi_i\}$ $i \in I^+$ homogén Markov folyamattal leirt rendszerünknek adott $m>0$ mellett $V: R^n \to R^+$ a sztochasztikus időtől független Ljapunov függvénye.

1/ Jelöljük $k(x)$ -el az

$$0 \leq k(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \{V(x) < m\},\quad m>0 \\ -\int_{R^n} V(z) P(x,1,dz) + V(x), & x \in \{V(x) < m\} \end{cases} \qquad /3.23/$$

függvényt.

2/ Legyen $P_m = \{k(x)=0\} \cap \{V(x) < m\}$.

Ekkor

$$P(\xi_m \to P_m \mid \xi_0 = x) \geq 1 - \frac{V(x)}{m} \qquad /3.24/$$

$x \in \{V(x) < m\}$ esetén.

Ha még V Ljapunov függvény tetszőleges m mellett, és $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, akkor

$$P(\xi_n \to P \mid \xi_0 = x) = 1 \qquad /3.25/$$

$x \in R^n$.

Tételünk közvetlen következménye a 3.1 alaplemmának, de a 3.1 következménynek is. Ugyanis a $k(x) > d$ halmazt $d > 0$ esetén majdnem minden $w \in B_m$ trajektória véges számú I^+-beli pont kivételével elkerüli minden $d > 0$ mellett.

<u>3.2b Tétel:</u> Legyen a $\{\xi_i\}\ i \in I^+$ homogén vagy inhomogén folyamat adott $m > 0$ -hoz tartozó Ljapunov függvénye $V: R^n \times I^+ \to R^+$. Teljesüljön a $G_m = \{V(x,i) < m\} \subset R^n \times I^+$ halmazon, hogy

$$0 \leq k(x,i) = \begin{cases} \int\limits_{R^n} V(z,i+1) P(i,x,i+1,dz) + V(x,i), & (x,i) \in G_m \\ 0 & (x,i) \notin G_m \end{cases} \qquad /3.26/$$

1/ $k(x,i) \geq k_1(x) \geq 0$, $k_1(x)$ adott Borel mérhető függvénnyel.

2/ Legyen $P_m \subset R^n$ az

$$P_m = \{k_1(x) = 0\} \cap \{x,\ \exists i \in I^+ \text{ hogy } V(x,i) < m\}$$

/3.27/ egyenlőséggel megadott halmaz.

Ha $k \in I^+$ olyan, hogy van $x \in R^n$ hogy $(x,k) \in G_m$, akkor

$$P(\xi_n \to P_m \mid \xi_k = x) \geq 1 - \frac{V(x,k)}{m} . \qquad /3.28/$$

Ha 1/ és 2/ teljesülnek minden m mellett, akkor $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$,

$$P(\xi_n \to P \mid \xi_k = x) = 1 \qquad /3.29/$$

mellett.

A tétel teljes egészében következik a 3.2 alaplemmából, illetve a 3.1 következményből.

Az exponenciális stabilitás diszkrét változatának előkészitéseként egy lemmát mondunk ki.

<u>3.3 Lemma:</u> Legyenek az $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ számok nem negativak, és teljesitsék az

$$f(i+1) - f(0) \leq -\alpha \sum_{j=0}^{i} f(j) \qquad /3.30/$$

egyenlőtlenséget. Ekkor érvényes az

$$f(i+1) \leq f(0) \cdot e^{-\alpha(i+1)} \qquad /3.31/$$

becslés.

Az aszimptotikus stabilitásra vonatkozó tételt ismét két változatban mondjuk ki.

<u>3.3a Tétel:</u> Legyen $\{\xi_i\}_{i \in I^+}$ homogén Markov folyamat és legyen ennek $V: R^n \to R^+$ egy adott $m > 0$ -hoz tartozó Ljapunov függvénye, mely teljesiti az alábbiakat:

1/ A $P = \{V(x) = 0\} \subset R^n$ nem üres.

2/ Minden $x \in G_m$ esetén teljesüljön az

$$\int_{R^n} V(z)\, P(x,1,dz) - V(x) \leq -\alpha V(x) \qquad /3.35/$$

feltétel valamilyen $\alpha > 0$ -val.

Ekkor igazak a következő állitások:

1/ Rögzitett $x \in G_m$ és tetszőleges $\lambda > 0$ esetén

$$P\left\{\sup_{j_0 \leq i < \infty} V(\xi_i) \geq \lambda \,\middle|\, \xi_0 = x\right\} \leq \frac{V(x)}{m} + \frac{V(x)\, e^{-\alpha j_0}}{\lambda} \qquad /3.36/$$

2/ Ha a fenti 1/, 2/ érvényes tetszőleges $m > 0$ mellett, akkor

$$P\left\{\sup_{j_0 \leq i < \infty} V(\xi_i) \geq \lambda \,\middle|\, \xi_0 = x\right\} \leq \frac{V(x)\, e^{-\alpha j_0}}{\lambda}$$

tetszőleges $\lambda > 0$ és $x \in R^n$ mellett.

3/ Igaz továbbá, hogy

$$P(\xi_i \to P \mid \xi_0 = x) \geq 1 - \frac{V(x)}{m},$$

illetve a 2/ állitás esetében

$$P(\xi_i \to P \mid \xi_0 = x) = 1$$

Az inhomogén Markov folyamatokra vonatkozó aszimptotikus stabilitási tétel pedig a következő:

<u>3.3b Tétel:</u> Legyen $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ homogén vagy inhomogén Markov folyamat, melynek $V\colon R^n \times I^+ \to R^+$ Ljapunov függvénye teljesiti az alábbiakat:

1/ A

$$P^k = \bigcup_{i=k}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \mid V(x,j) = 0\} \subset R^n \qquad /3.37/$$

halmaz nem üres, ahol $k \in I^+$ -hez van $x \in R^n$, hogy $(x,k) \in G_m$.

2/ Minden $y \in G_m$ mellett

$$\int_{R^n \times I^+} V(z)\,\widetilde{P}(y,1,dz) - V(y) \leq \alpha V(y) \qquad /3.39/$$

teljesüljön valamely $\alpha > 0$ -val.

Ekkor

1/ Tetszőleges $(x,k) \in G_m$ és $\lambda > 0$ mellett

$$P\left\{\sup_{k \leq j_0 < i < \infty} V(\xi_i, i) \geq \lambda \,\middle|\, \xi_k = x\right\} \leq \frac{V(x,k)}{m} + \frac{V(x,k)\,e^{-\alpha j_0}}{m} \qquad /3.40/$$

2/ Ha az 1/, 2/ feltétel érvényes tetszőleges $m > 0$ mellett, akkor

$$P\left\{\sup_{k \leq j_0 \leq i < \infty} V(\xi_i, i) \geq \lambda \,\middle|\, \xi_k = x\right\} \leq \frac{V(x,k)\,e^{-\alpha j_0}}{\lambda} \qquad /3.41/$$

3/ Teljesül továbbá, hogy

$$P\left(\xi_i \longrightarrow p^k \,\middle|\, \xi_k = x\right) \geq 1 - \frac{V(x,k)}{m} \qquad /3.42/$$

illetve a 2/ állitásnak megfelelő esetben

$$P\left(\xi_i \to p^k \,\middle|\, \xi_k = x\right) = 1 . \qquad /3.43/$$

3.3 A tételek bizonyitásai

A 3.2 alaplemma bizonyitása:

Először is /3.7/-ből következik, hogy a $V(\tilde{\xi}_{(k+l) \wedge \tau_m})$ folyamat nem negativ szupermartingál. /3.5/ miatt ugyanis

$$E\left(V\left(\tilde{\xi}_{(k+l+1)\wedge\tau_m}\right) \mid \tilde{\xi}_{(k+l)\wedge\tau_m}\right) - V\left(\tilde{\xi}_{(k+l)\wedge\tau_m}\right) =$$

$$= \int_{R^n \times I^+} V(z)\,\tilde{P}\left(\tilde{\xi}_{(k+l)\wedge\tau_m}, 1, dz\right) - V\left(\tilde{\xi}_{(k+l)\wedge\tau_m}\right) \le 0, \qquad /3.11/$$

ha a /3.7/-et felhasználjuk, és $\tilde{\xi}_{(k+l)\wedge\tau_m} \in G_m$. Ellenkező esetben $\tau_m(w) \le k+l$, ezért $\tau_m(w) < k+l+1$, itt az átmenet valószinüség az egypont mérték, ezért a különbség 0. A hozzá tartozó σ-algebra család $\{\mathcal{F}^{\tilde{\xi}}_{(k+l)\wedge\tau_m}\}_{l=0}^{\infty}$ lesz.

Ha most képezzük az $\Omega_y = \{\tilde{\xi}_{k+l} = y \in G_m\}$ halmazon az $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \cap \Omega_y$ σ-algebrával és P_y feltételes mértékkel az $\{\Omega_y, \mathcal{F}_y, P_y\}$ valószinüségi mezőt, és ezen tekintjük a $\tilde{\xi}_{(k+l)\wedge\tau_m} \chi_{\Omega_y}$ megszoritott folyamatot, ez Markov folyamat lesz, változatlan átmeneti valószinüségekkel, és igy e mezőn is a

$$V^y\left(\tilde{\xi}_{(k+l)\wedge\tau_m^{(w)}}\right) = V\left(\tilde{\xi}_{(k+l)\wedge\tau_m^{(w)}}\right) \chi_{\Omega_y}^{(w)} \qquad /3.12/$$

folyamat nem negativ szupermartingál az $\{\mathcal{F}^{\tilde{\xi}, y}_{(k+l)\wedge\tau_m} = \mathcal{F}^{\tilde{\xi}}_{(k+l)\wedge\tau_m}\}_{l=0}^{\infty}$ σ-algebra családdal, ugyanis a χ_{Ω_y} szorzó kiemelhető a /3.11/ feltételes várhatóérték mögül, és igy a különbségre is érvényes marad a χ_{Ω_y} -al való szorzás.

E feltételes mezőn alkalmazva a szupermartingál egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$P\left(\sup_{k \le n < \infty} V\left(\tilde{\xi}_{n\wedge\tau_m(w)}\right) \ge \lambda \mid \tilde{\xi}_k = (x,k)\right) \le \frac{V(x,k)}{\lambda} \qquad /3.13/$$

$m \ge \lambda \ge 0$.

Ámde G_m és τ_m definicióját figyelembe véve az eredeti $\tilde{\xi}_n$ folyamattal is igaz, hogy /3.13/ teljesül, amit kiirva épp a bizonyitandó 3.8 állitás adódik.

A $V^{\gamma}(\tilde{\xi}_{(k+\ell)})$ szupermartingál konvergenciája a már bizonyitott /3.8/-cal együtt /3.9/-et adja.

Marad tehát a /3.10/ bizonyitása.

Induljunk ki ehhez a /3.11/-ből felhasználva a /3.7/-et.

$$E\left(V(\tilde{\xi}_{(k+\ell+1)\wedge\tau_m}) \mid \tilde{\xi}_{(k+\ell)\wedge\tau_m}\right) - V(\tilde{\xi}_{(k+\ell)\wedge\tau_m}) = -k\left(\tilde{\xi}_{(k+\ell)\wedge\tau_m}\right). \qquad /3.14/$$

Képezzük másrészt a

$$V(\hat{\xi}_{(k+\ell+1)\wedge\tau_m}) - V(\hat{\xi}_{(k\wedge\tau_m)}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\ell} \left[V(\hat{\xi}_{(k+i+1)\wedge\tau_m}) - V(\tilde{\xi}_{(k+i)\wedge\tau_m})\right] \qquad /3.15/$$

előállitásnak feltételes várható értékeit rendre az $\mathcal{F}^{\tilde{\xi}}_{(k+\ell)\wedge\tau_m}, \dots, \mathcal{F}^{\tilde{\xi}}_{k}$ σ-algebrák szerint. Miután ezek monoton fogyó rendszert alkotnak, igy a k-ik lépésben már az összeg minden tagjának $\mathcal{F}^{\xi}_{k}$ feltételes várható értékét nyerjük. Másrészt

$$E\left(V(\tilde{\xi}_{(k+i+1)\wedge\tau_m}) - V(\hat{\xi}_{(k+i)\wedge\tau_m}) \mid \mathcal{F}^{\tilde{\xi}}_{(k+i)\wedge\tau_m}\right) = -k\left(\hat{\xi}_{(k+i)\wedge\tau_m}\right).$$

/3.16/

Ezért a /3.16/ különbség $\mathcal{F}^{\tilde{\xi}}_{k\wedge\tau_m}$ feltételes várható értékére azt kapjuk, hogy

$$E\left(V(\tilde{\xi}_{(k+\ell+1)\wedge\tau_m}) \mid \tilde{\xi}_{k\wedge\tau_m} = y\right) - V\left(\tilde{\xi}_{k\wedge\tau_m} = y\right) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{\ell} E\left(k(\hat{\xi}_{(k+i)\wedge\tau_m}) \mid \tilde{\xi}_{k\wedge\tau_m} = y\right). \qquad /3.17/$$

A /3.17/ jobb oldala a bal oldal korlátossága és a jobb oldali összeg tagjainak állandó előjele következtében korlátos

$l \to \infty$ mellett. Ez azonban azt jelenti a Beppo-Lévi tétel értelmében, hogy $\sum_{i=0}^{\infty} k(\hat{\xi}(k+i) \wedge \tau_m(w))$ a Π_y -on / P_y - m.m. / 1 valószinüséggel konvergens. Ebből pedig következik, hogy

$$k(\hat{\xi}(k+i) \wedge \tau_m(w)) \to 0, \qquad /3.18/$$

és a bizonyitandó /3.10/.

A 3.1 következmény bizonyitása

Legyen $\vartheta_{y,M}(w,i)$ azon (w,i) párokon 1, ahol $\hat{\xi}_{k+i}(w) \in M$, $\hat{\xi}_k(w) = y = (x,k)$.

Ekkor a /3.17/ összeg jobb oldalát növelhetjük, ha belül a feltételes várható érték alatt

$$k(\hat{\xi}(k+i) \wedge \tau_m(w)) \vartheta_{y,M}(w,i) - t \qquad /3.20/$$

irunk a k helyett. Ámde e halmazon $1 - \frac{V(x,k)}{m}$ -nél nagyobb valószinüséggel minden w -ra

$$k(\hat{\xi}(k+i) \wedge \tau_m(w)) \vartheta_{y,m}(w) > d, \qquad /3.21/$$

és igy az összeg korlátos csak végessége esetén maradhat.

A 3.3 lemma bizonyitása

Képezzük a $\varphi : [0,\infty) \to R^+$ függvényt az alábbi definicióval:

$$\varphi(t) - f_i \qquad \text{ha} \qquad i \le t < i+1 \qquad /3.32/$$

Ekkor érvényes a

$$\varphi(i+1)-\varphi(0)\leq-\alpha\int_0^{i+1}\varphi(t)\,dt \qquad /3.33/$$

becslés. Ezért a Gronwall-Bellman lemma szerint

$$\varphi(i+1)\leq\varphi(0)\,e^{-\alpha(i+1)}, \qquad /3.34/$$

ami /3.32/ figyelembevételével éppen /3.31/.

<u>A 3.3b tétel bizonyitása:</u>

A két állitást együtt bizonyitjuk. Ha alkalmazzuk a szupermartingál egyenlőtlenséget a $V^y(\tilde{\xi}(k+i)\wedge\tau_m)$ szupermartingálra a 3.2 alaplemma bizonyitásában bevezetett feltételes valószinüségi mezőn, akkor

$$P\left\{\sup_{k\leq j_0\leq i<\infty}V(\tilde{\xi}(k+i)\wedge\tau_m)\geq\lambda\right\}\leq\frac{E(V(\tilde{\xi}(k+j_0)\wedge\tau_m))}{\lambda}, \qquad /3.44/$$

Ha pedig ezen y mellett beirjuk /3.39/-et a /3.17/ becslése, kapjuk, hogy a 3.3 lemma szerint

$$E(V(\tilde{\xi}(k+j_0)\wedge\tau_m))\leq V(y)\,e^{-\alpha j_0}. \qquad /3.45/$$

Ha /3.44/-et és az alaplemma /3.9/ állitását figyelembe vesszük, megkapjuk a 3.3a és 3.3b tételek állitásait.

A P^k-hoz tartás pedig abból következik, hogy /3.44/ épp annak az eseménynek a valószinüségét becsüli, hogy van olyan $i>j_0$, amire a $\tilde{\xi}_i(w)$ trajektória a

$$\bigcup_{i=j_0}^{\infty}\{m>V(x,i)\geq\lambda\}\subset R^n\times I^+ \qquad /3.46/$$

halmazba belemetsz. Annak a valószinüsége, hogy ez minden j_0 -ra igaz /azaz ezek metszetére/ 0 minden $\lambda > 0$ mellett. Ezzel a tételeket beláttuk.

4. PERTURBÁLT RENDSZEREK

Legyenek $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ és $\{\eta_t\}_{t\in R^+}$ homogén vagy inhomogén jobbról folytonos erős értelemben vett olyan n-dimenziós Markov folyamatok, melyekből képzett $\{\xi_t,\eta_t\}_{t\in R^+}$ $2n$-dimenziós folyamat is erős értelemben Markov folyamat.

4.1 Tétel: Legyen a $\{\xi_t,\eta_t\}$ Markov folyamatnak a $V\ R^{2n}\times R^+ \longrightarrow R^+$ függvény Ljapunov függvénye a $G_m=\{(x,y,t)|V(x,y,t)<m\}$ halmazon, és teljesülnek az alábbiak:

1/ Legyen a $\{\xi_t,\eta_t\}$ folyamat egyenletesen sztochasztikusan folytonos G_m -en.

2/ Legyen $W: R^+\to R^+, W(0)=0$ szigorúan monoton folytonos függvény és jelöljük ki a $Q=\{(x,y)|W(\|x-y\|)<m\}\subset R^{2n}$ halmazt.

3/ Legyen

$$W\left(\|x-y\|\right)\leq V(x,y,t) \qquad /4.1/$$

minden $(x,y,t)\in R^{2n}\times R^+$ esetén.

4/ Legyen továbbá

$$(\tilde{Q}^*_m V)(x,y,t)=-k(x,y,t)\leq -k_1(\|x-y\|)\leq 0 \qquad /4.2/$$

minden $(x,y,t)\in G_m$ esetén.

5/ Definiáljuk a $P_m\subset R^{2n}$ halmazt:

$$P_m:=\{(x,y)|k_1(\|x+y\|)=0\}\cap\{(x,y)|V(x,y,t)<m,t>T\} \qquad /4.3/$$

ahol $T\in R^+$ olyan, hogy van hozzá $(x,y)\in R^{2n}$, melyre $(x,y,T)\in G_m$.

6/ Létezzék $d_0 > 0$, hogy $d_0 > d > 0$ esetén megadható olyan $\varepsilon_d > 0$, hogy

$$k_1(x,y,t) > d, \text{ ha } (x,y,t) \in G_m \setminus P_{m\,\varepsilon_d} \qquad /4.4/$$

Ekkor a 2/, 3/, 4/ feltételek teljesülése esetén

$$P\left\{\sup_{T\le t<\infty} \|\xi_t - \eta_t\| \ge W^{-1}(m) \,\middle|\, (\xi_T, \eta_T) = (x,y)\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{T\le t<\infty} V(\xi_t, \eta_t, t) > m \,\middle|\, (\xi_T, \eta_T) = (x,y)\right\} \le$$

$$\le \frac{V(x,y,T)}{m} \qquad /4.5/$$

Ha még az 1/ és 5/ is teljesül akkor

$$P\left\{\|\xi_t - \eta_t\| \to \{r \mid k_1(r) = 0\} \,\middle|\, (\xi_T, \eta_T) = (x,y)\right\} \ge 1 - \frac{V(x,y,T)}{m}$$

A tétel teljes egészében következik a 2.2 tételből. Annyit kell csupán meggondolni, hogy $G_m \subset Q \times R^+$ és hogy P_m -en $k_1(\|x-y\|) = 0$.

Ugyanezen tétel diszkrét változatát a következőképpen mondhatjuk ki:

Legyen $\{\xi_i\}_{i\in I^+}$ és $\{\eta_i\}_{i\in I^+}$ n-dimenziós homogén vagy inhomogén Markov folyamat, melyekből képezett $\{\xi_i, \eta_i\}$ $2n$-dimenziós folyamat is Markov folyamat.

<u>4.2 Tétel:</u> Legyen a $\{\xi_i, \eta_i\}_{i\in I^+}$ Markov folyamatnak a $V: R^{2n} \times I^+ \to R^+$ folytonos függvény Ljapunov függvénye a $G_m = \{(x,y,i) \mid V(x,y,i) < m\}$ halmazon, és teljesüljenek az alábbiak:

1/ Legyen $W: R^+ \to R^+$, $W(0) = 0$ szigorúan monoton folytonos függvény, és jelöljük ki a $Q = \{(x,y) \mid W(\|x-y\|) < m\} \subset R^{2n}$

halmazt.

2/ Legyen

$$W(\|x-y\|) \leq V(x,y,i) \qquad /4.6/$$

minden $(x,y,i) \in R^{2n} \times R^{+}$ mellett.

3/ Teljesüljön a

$$0 \leq k_1(\|x-y\|) \leq k(x,y,i) := \begin{cases} -\int\limits_{R^n} V(z_1,z_2,i+1)P(i,x,y,i+1,d(z_1,z_2)) + V(x,y,i) & (x,y,i) \in G_m \\ 0 \text{ ha } (x,y,i) \notin G_m \end{cases} \qquad /4.7/$$

egyenlőtlenség a $k_1(r)$ Borel mérhető függvénnyel.

4/ Legyen $P_m \subset R^{2n}$ a

$$P_m = \{k_1(\|x-y\|)=0\} \cap \{(x,y) \mid \exists i \in I^{+}_{,} \text{ hogy } V(x,y,i) < m\} \qquad /4.8/$$

egyenlőséggel definiált halmaz.

Ha $k \in I^{+}$ olyan, hogy van hozzá $(x,y) \in R^{2n}$ melyre $(x,y,k) \in R^{2n} \times I^{+}$, akkor

$$P\left\{\sup_{k \leq i < \infty} \|\xi_i - \eta_i\| \geq W^{-1}(m) \,\Big|\, (\xi_k,\eta_k)=(x,y)\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{k \leq i < \infty} V(\xi_i,\eta_i,i) \geq m \,\Big|\, (\xi_k,\eta_k)=(x,y)\right\} \leq \frac{V(x,y,k)}{m}, \qquad /4.9/$$

továbbá

$$P\left\{\|\xi_t-\eta_t\| \to \{r \mid k_1(r)=0\} \,\Big|\, (\xi_k,\eta_k)=(x,y)\right\} \geq 1-\frac{V(x,y,k)}{m} \qquad /4.10/$$

A tétel egyenes következménye a 3.2b tételnek.

II. Fejezet

1. DISZKRÉT RENDSZEREK

Ebben a részben a sztochasztikus Ljapunov módszer alkalmazásait mutatjuk be. Három témakörrel foglalkozunk:

1/ Diszkrét rendszerek komponenseinek aszimptotikus viselkedése.

2/ Diszkrét rendszerek stabilitása.

3/ Közelitő algoritmusok aszimptotikus viselkedése.

Az első fejezet eredményeit illetve azoknak kis bővitését alkalmazzuk itt. A bővitést az tette indokolttá, hogy a Ljapunov módszer első fejeztbeli eredményei elsősorban a szto - hasztikus approximációs folyamatok vizsgálatára alkalmasak /ld [4] / mig a gyakorlatban előforduló rendszerek ezeknél bonyolultabbak. Az 1.1.2 alaplemma, 1.1.1 alaptétel új eredmények, itt a legegyszerübb formáját alkalmazzuk.

Alkalmazásként bizonyitást adunk L. Ljung aszimptotikus stabilitási tételére is /ld [11] /, mely pontos, és az eredetinél lényegesen egyszerübb. Az itteni bizonyitásnál a rendszer nem függ az időtől, de megjegyezzük, hogy olyan bizonyitást adtunk, mely az utóbbi esetre is szó szerint átvihető. A többi bizonyitásban és az 1.6 alaplemmában időtől független Ljapunov függvény szerepel, de az első fejezettel analóg módon minden itteni módszer érvényben marad időtől is függő Ljapunov függvényre.

1.1. A STABILITÁSI ALAPLEMMA ÁLTALÁNOSITÁSA

Legyen $\{\beta_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ egy m-dimenziós vektorfolyamat. Legyen $V: R^m \to R^+$ olyan függvény, mely teljesiti $\mathcal{F}_k^\beta := \sigma(\{\beta_l\}_{l=k}^{-\infty})$ mellett az

$$E(V(\beta_{k+1}) - V(\beta_k) \| \mathcal{F}_k^\beta) = \gamma_k \cdot \varphi(\beta_k) + \gamma_k \varepsilon_k, \; k \geq k_0 \qquad /1.1/$$

egyenlőséget, ahol

1/ $\varphi(\beta) \leq 0$ folytonos függvény, mely $-\varphi(\beta) < \varphi(\beta')$ esetén $V(\beta) < V(\beta')$ -t teljesiti, $\beta, \beta' \in R^m$ esetén.

2/ $V(\beta) \to \infty, -\varphi(\beta) \to \infty$ ha $\|\beta\| \to \infty$.

3/ $E(\|\varepsilon_k\|^2) \leq C$ k-tól függetlenül $k \geq k_0$ -ra.

4/ $E(V(\beta_k)) < \infty$ minden $k \geq k_0$ esetén.

5/ $\gamma_k \geq 0, \; k \geq k_0$ mellett.

1.1.1 Lemma: Tetszőleges $A \in \mathcal{F}_k^\beta, \; P(A) > \frac{1}{\varrho^2}$ eseményre teljesül az

$$\int_A \|\varepsilon_k\| dP \leq P(A) \cdot C \cdot \varrho \qquad /1.2/$$

egyenlőtlenség.

Bizonyitás:

$$\int_A \|\varepsilon_k\| dP = \int_\Omega \chi_A \cdot \|\varepsilon_k\| dP \leq \sqrt{P(A)} \cdot E(\|\varepsilon_k\|^2)^{1/2} \leq$$
$$\leq P(A) \cdot C \cdot \frac{1}{\sqrt{P(A)}} \leq P(A) \cdot C \cdot \varrho . \qquad /1.3/$$

Ezután az első stabilitási alaplemmát készitjük elő:

Legyen

$$G_\ell := \{\beta \mid \varphi(\beta) < -(\ell+1)\cdot c\} \qquad /1.4/$$

és legyen a G_ℓ -ből $k > k_0$ utáni első kilépési idő $\tau_{\ell,k}$.

Képezzük a

$$\hat{V}_j := V(\beta_{j \wedge \tau_{k,\ell}}) \qquad /1.5/$$

megállitott folyamatot.

<u>1.1.2 Alaplemma:</u> Az /1.5/-tel megadott folyamatra teljesülnek az alábbi állitások:

1/ $$P\{\sup_{j\geq k} \hat{V}_j > \lambda\} \leq \frac{E(\hat{V}_k)}{\lambda} + \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.6/$$

és

2/ $$P\{\beta_{j \wedge \tau_{\ell,k}} \not\to (R^m \setminus G_\ell)\} \leq \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.7/$$

ha $\sum_{i=k_0}^{\infty} \gamma_i = \infty$.

<u>Bizonyitás:</u>

1/ Legyen $A \in \mathcal{F}_j^\beta$ olyan esemény, amelyre teljesül a

$$P(\{\varphi(\beta_j) < -(\ell+1)c\} \cap A) > \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.8/$$

feltétel. Ekkor

$$\int_A \hat{V}_{j+1}\, dP \leq \int_A \hat{V}_j\, dP - \frac{c\,\gamma_j}{\ell} \qquad /1.9/$$

Ugyanis a /2.5/ megállitás miatt

$$\int_A (\hat{V}_{j+1} - \hat{V}_j)\, dP = \int_{\{\varphi(\beta_j < -(\ell+1)c\} \cap A} (V_{j+1} - V_j)\, dP = \int_{\{\varphi(\beta_j) < -(\ell+1)c\} \cap A} E(V_{j+1} - V_j \mid \mathcal{F}_j^\beta)\, dP =$$

$$= \gamma_j \cdot \int_{\{\varphi(\beta_j) < -(\ell+1)c\} \cap A} (\varphi(\beta_j) + \varepsilon_j)\, dP, \qquad /1.10/$$

éa alkalmaztuk a /2.1/ tulajdonságot.

Az /1.10/ első tagjára alkalmazzuk azt a nyilvánvaló becslést, hogy $\varphi(\beta_i) \leq -(\ell+1)\cdot c$ mig a másodikra alkalmazhatjuk az 1.1.1 lemmát, és igy

$$\int_A (\hat{V}_{j+1} - \hat{V}_j)\,dP \leq -\gamma_j \cdot P(\{\varphi(\beta_j) < -(\ell+1)c\} \cap A)\cdot((\ell+1)c - \ell\cdot c) \leq$$
$$\leq -\frac{\gamma_j\, c}{\ell} \qquad /1.11/$$

ahol tekintetbe vettük az /1.8/-at.

Állitsuk elő ezután a $\{\sup\limits_{i \geq k} \hat{V}_i > \lambda\}$ eseményt

$$\{\sup_{j \geq k} \hat{V}_j > \lambda\} = \bigcup_{j=k}^{\infty} \{\hat{V}_j > \lambda\} = \bigcup_{j=k}^{\infty} \{\hat{V}_j > \lambda\} \cap \left(\bigcap_{i=k}^{j-1} \{\hat{V}_i \leq \lambda\}\right) \qquad /1.12/$$

alakban.

Vezessük be az

$$A_j^\lambda := \bigcap_{i=k}^{j} \{\hat{V}_i \leq \lambda\} \qquad /1.13/$$

és a

$$B_j^\lambda := \{\hat{V}_j > \lambda\} \cap A_{j-1}^\lambda \qquad /1.14/$$

halmazokat, és képezzük a

$$V_\lambda^q = \sum_{j=k}^{q} \chi_{B_j^\lambda} \cdot \hat{V}_j + \chi_{A_q^\lambda} \cdot \hat{V}_q \qquad /1.15/$$

valószinüségi változó sorozatot, melyre nyilvánvalóan teljesül a

$$\{\sup_{k \leq i \leq q} \hat{V}_i > \lambda\} = \{ V_\lambda^q > \lambda\} \qquad /1.16/$$

összefüggés, és

$$V_\lambda^k = \hat{V}_k . \qquad /1.17/$$

Legyen most $\lambda>0$ tetszőleges.

Tudjuk, hogy

$$P\{\hat{V}_k > \lambda\} \leq \frac{E(\hat{V}_k)}{\lambda} . \qquad /1.18/$$

Vegyük V_λ^{k+1} -t. Ha a

$$P(\{\varphi(\beta_k) < -(\ell+1)c\} \cap \{V_\lambda^k \leq \lambda\}) > \frac{1}{\ell^2} , \qquad /1.19/$$

akkor az

$$E(V_\lambda^{k+1} - V_\lambda^k) = \int\limits_{\{\varphi(\beta_k)<-(\ell+1)c\}\cap\{V_\lambda^k\leq\lambda\}} (V_{k+1} - V_k)\,dP \leq -\frac{\gamma_k \cdot c}{\ell} \qquad /2.20/$$

és ezért

$$P\{V_\lambda^{k+1} > \lambda\} \leq \frac{E(\hat{V}_k)}{\lambda} , \qquad /1.21/$$

vagy a

$$P(\{\varphi(\beta_k) \geq -(\ell+1)c\} \cap \{V_\lambda^k \leq \lambda\}) \geq 1 - \frac{E(\hat{V}_k)}{\lambda} - \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.21/$$

hisz a komplementerbe csak legfeljebb $\frac{E(\hat{V}_k)}{\lambda} + \frac{1}{\ell^2}$ valószinüséggel tartozhat a $\hat{V}_k$. Miután a folyamat megállitott, igy a /1.21/ érvényes marad

$$P(\{\sup_{i\geq k} \hat{V}_i \leq \lambda\}) \geq 1 - \frac{E(\hat{V}_k)}{\lambda} - \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.22/$$

alakban, ami a tételt bizonyitja.

Az /1.20/-nak megfelelő esetet folytatva nézzük most a

$$P(\{\varphi(\beta_{k+1}) < -(\ell+1)c\} \cap \{V_\lambda^{k+1} \leq \lambda\}) =: P_{k+1} \qquad /1.23/$$

valószinüséget. Ha erre a

$$P_{k+1} > \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.24/$$

teljesül, akkor /1.20/-hoz hasonlóan

$$E(\hat{V}_\lambda^{k+2} - \hat{V}_\lambda^{k+1}) \leq - \frac{\gamma_{k+1} C}{\ell}, \qquad /1.25/$$

míg ellenkező esetben a /1.21/-et és /2.26/-ot felhasználva ismét /1.22/-t nyerjük.

Teljes indukcióval folytatva az eljárást, ha

$$P_i := P(\{\varphi(\beta_i) < -(\ell+1)C\} \cap \{V_\lambda^i \leq \lambda\}) \qquad /1.27/$$

a

$$P_i > \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.28/$$

feltételt teljesiti, akkor

$$E(V_\lambda^{i+1} - V_\lambda^i) \leq -\gamma_i \frac{C}{\ell} \qquad /1.29/$$

mig

$$P_i \leq \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.30/$$

esetén a

$$P\{V_\lambda^i > \lambda\} \leq \frac{E(\hat{V}_k)}{\lambda} \qquad /1.31/$$

és /1.30/ együtt az /1.22/ egyenlőtlenséget eredményezi, tekintetbe véve a megállitást, és ez a tétel 1/ állitásának bizonyitását adja.

Érvényes másrészt az /1.29/ egyenlőtlenség szukcessziv alkalmazásával a

$$0 \leq E(V_\lambda^i) \leq E(\hat{V}_k) - \frac{C}{\ell} \sum_k^i \gamma_j \qquad /1.32/$$

egyenlőtlenség. Ha a $\sum_k^\infty \gamma_i = \infty$ akkor ez azt jelenti, hogy eljárásunk véges lépésben ilyen esetben /2.6/-hoz vezet, és egyúttal /2.32/ minden $\lambda>0$-ra érvényes lévén azt kapjuk, hogy a folyamat $1-\frac{1}{\ell^2}$ valószinüséggel megáll, ami a 2/ állitást bizonyitja.

1.1.1 Következmény:

Vezessük be a $\varrho(\beta,N), N\subset R^m$ kompakt, pont és halmaz távolságot.

Vezessük be az

$$F_\ell = R^m \setminus G_\ell \qquad /1.33/$$

jelölést. Ekkor

1/ $\sum_{i=k}^{\infty} \gamma_i = \infty$ esetén

$$P\{\sup_{j\geq k} \inf_{i\geq j} \varrho(\beta_i, F_\ell)=0\} \geq 1-\frac{1}{\ell^2} \qquad /1.34/$$

és ha még

2/ $$\sup_{i\geq j} E(|\varepsilon_i|^2)^{1/2} = c_j \to 0 \qquad /1.35/$$

is teljesül, akkor

$$P\{\sup_{j\geq k} \inf_{i\geq j} \varrho(\beta_i, F_1)\}=1. \qquad /1.36/$$

Bizonyitás:

Képezzük az

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \{\beta_j \in F_\ell\} = B_j \qquad /1.37/$$

halmazcsaládot, és vegyük a $\bigcap_{j=k}^{\infty} B_j = B_\infty$ -t.

Az alaplemma 2/ állitása alapján

$$P\{\inf_{i\geq j} \varrho(\beta_i(\omega), F_\ell) > 0,\ \omega\in\Omega\setminus B_j) < \frac{1}{\ell^2} \qquad /1.38/$$

ami minden j-re érvényes, és $B_{j+1}\subset B_j$. Ezért

$$P\{\sup_{j\geq k}\inf_{i\geq j}\varrho(\beta_i(\omega),F_\ell)>0,\ \omega\in\Omega\setminus B_\infty\}<\frac{1}{\ell^2}\qquad /1.39/$$

ami az állitást adja.

Az /1.35/-ben definiált C_i -vel az F_ℓ halmazra azt kapjuk, hogy az $(\ell+1)C=(k+1)C_i$ -ből kapott $k+1=\frac{(\ell+1)C}{C_i}$ -vel teljesülni fog $j\geq i$ -re a

$$P\{\inf_{j\geq i}\varrho(\beta_j(\omega),F_\ell)>0\}\leq\frac{C_i^2}{C^2\cdot\ell^2}\longrightarrow 0\qquad /1.38/$$

ahol a B_j -k monotonitásából következik, hogy

$$P\{\sup_{i\geq k}\inf_{j\geq i}\varrho(\beta_j(\omega),F_\ell)=0\}=1.\qquad /1.39/$$

Sőt F_ℓ definiciójában C helyett C_i -t irva, $i\to\infty$ mellett /1.36/-ot nyerjük.

Ezután a β_i sorozat konvergenciájának bizonyitását késziitjük elő az alábbi lemmával:

<u>1.1.3 Lemma:</u> Tegyük fel, hogy valamely $i>k$ -tól kezdve teljesül a

$$-\varrho\cdot E(\varphi(\beta_i))\geq E(\varepsilon_i^+)\qquad /1.40/$$

feltétel. Ekkor az

$$\eta=\sum_{i=k}^{\infty}\gamma_i\cdot\varepsilon_i^+<\infty\quad m.m.\qquad /1.41/$$

és η integrálható.

<u>Bizonyitás:</u> $j\geq i$ -re felirhatjuk az

$$E(V_{j+1}-V_j) = E(E(V_{j+1}-V_j)|\mathcal{F}_j^\beta) =$$
$$= E(\gamma_j\,\varphi(\beta_j) + \gamma_j\,\varepsilon_j) = \gamma_j\,(E(\varphi(\beta_j) - \varepsilon_j^- + \varepsilon_j^+)) \leq$$
$$\leq (1-\varrho)E(\varphi(\beta_j)) - E(\varepsilon_j^-) \leq (1-\varrho)E(\varphi(\beta_j)) \leq 0, \qquad /1.42/$$

ahol felhasználtuk a /1.40/-et.

Ebből következik, hogy

$$E(V_j - V_i) \geq -2E(V_i) \qquad /1.43/$$

és

$$E(V_j - V_i) = \sum_{p=i}^{j-1} E(V_{p+1} - V_p) \leq$$
$$\leq (1-\varrho)\sum_{p=i}^{j-1} \gamma_p E(\varphi(\beta_p)). \qquad /1.44/$$

Tekintetbe véve, hogy $\varphi(\beta_p) \leq 0$ és /1.43/-at, azt kapjuk, hogy

$$-\sum_{i=k}^{\infty} \gamma_i\,E(\varphi(\beta_p)) < \infty, \qquad /1.45/$$

ami /1.40/-el együtt a /1.41/ állitáshoz vezet.

<u>2.1.1 Alaptétel:</u> Tegyük fel, hogy a /1.1/ előállitásra teljesülnek az

1/ $\sum_{i=k}^{\infty} \gamma_i = \infty$ és

2/ $0 < \varrho < 1$ -val

$$-\varrho\cdot E(\varphi(\beta_j)) \geq E(\varepsilon_j^+), \quad j \geq i_0 > k \qquad /1.46/$$

feltételek.

Ekkor

A/ $E(|\varepsilon_j|^2)^{1/2} \leq C$ esetén a

$$P\{\lim_{i\to\infty} \varrho(\beta_i, F_e) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{e^2} \qquad /1.47/$$

b/ $E(|\varepsilon_j|^2)^{1/2} \to 0$ mellett pedig

$$P\{\lim_{i\to\infty} \varrho(\beta_i, F_1) = 0\} = 1 \qquad /1.48/$$

teljesül.

Bizonyitás: Az 1.1.1 következmény miatt elegendő megmutatnunk, hogy /1.46/ teljesülése esetén ha $a < b \leq 0$ számok, ezeknek megfelelő $\{\varphi(\beta) < a\}$ és $\{\varphi(\beta) \geq b\}$ nivóhalmazok közötti átmetszések száma véges, 1 valószinüséggel.

Képezzünk ezért egy valószinüségi változó sorozatot:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= k \\ \tau_1 &= \min\{n \mid n \geq k,\ \varphi(\beta_n) \leq a\} \\ \tau_2 &= \min\{n \mid n \geq \tau_1,\ \varphi(\beta_n) \geq b\} \\ &\ \ \vdots \\ \tau_{2i+1} &= \min\{n \mid n \geq \tau_{2i+1},\ \varphi(\beta_n) \geq b\} \end{aligned} \qquad /1.49/$$

Legyen ezután a χ_i az alábbi karakterisztikus függvény:

$$\chi_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \tau_{2i+1}(\omega) \leq i < \tau_{2(i+1)}(\omega),\ i = 0, 1, \ldots \\ 0, & \tau_{2i}(\omega) \leq i < \tau_{2i+1}(\omega),\ i = 0, 1, \ldots \end{cases} \qquad /1.50/$$

Értelmezzünk egy másik valószinüségi változót, mely egy trajektóriára megadja az átmetszések számát:

$$\beta(a, b) := \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{\tau_{2k} > 0\}} \qquad /1.51/$$

Mint ez jól ismert, az átmetszések számát becsülhetjük az alábbi úton: A V és φ függvények közötti 1/-ben megkövetelt kapcsolat következtében legyen $V_b < V_a$ az a, ill. b-nek megfelelő pozitiv számok, $V_b < V_a$. Ezért

$$(V_b - V_a)\cdot\beta(a,b) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \varkappa_i(\omega)\,(V_i - V_{i+1}). \qquad /1.52/$$

Ha meg tudjuk mutatni, hogy a jobb oldal várható értéke véges, akkor az /a,b/ közti átmetszések száma is véges, 1 valószinüséggel.

Miután a 2.1.3 lemma feltételei fennállnak, képezzük az

$$\eta_j = \sum_{i=j}^{\infty} \gamma_i \cdot \varepsilon_i^+ \qquad /1.53/$$

nem negativ valószinüségi változók sorozatát, és ezekkel a

$$W_j = V_j + \eta_j \qquad /1.54/$$

sorozatot.

Az /1.53/ felhasználásával könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} E(W_{j+1} - W_j \mid \mathcal{F}_j^\beta) &= E(V_{j+1} - V_j - \gamma_j \varepsilon_j^+ \mid \mathcal{F}_j^\beta) = \\ &= \gamma_j \cdot \varphi(\beta_j) + \gamma_j \cdot \varepsilon_j^- \end{aligned} \qquad /1.55/$$

minden $j \geq k$ -ra.

Felirhatjuk ezért az

$$E(V_{j+1} - V_j \mid \mathcal{F}_j^\beta) = E(W_{j+1} - W_j \mid \mathcal{F}_j^\beta) + \gamma_j \cdot \varepsilon_j^+ \qquad /1.56/$$

egyenlőséget.

Irjuk be ezt az /1.52/ egy szeletének várható értékébe:

$$E\left(\sum_{k}^{k+p} \varkappa_i (V_i - V_{i+1})\right) = \sum_{k}^{k+p} E\left(\varkappa_i E(V_i - V_{i+1} \mid \mathcal{F}_i^{\beta}\right) =$$
$$= \sum_{k}^{k+p} E\left(\varkappa_i E(W_i - W_{i+1} \mid \mathcal{F}_i)\right) - E(\varkappa_i \gamma_i \varepsilon_i^{+})$$

/1.57/

Ha felhasználjuk /2.55/-öt, azt kapjuk, hogy

$$E\left(\sum_{k}^{k+p} \varkappa_i (V_i - V_{i+1})\right) \leq \sum_{k}^{k+p} E(W_i - W_{i+1}), \qquad /1.58/$$

ahol tekintetbe vettük a korrekciós rész negativitását. Innét

$$E\left(\sum_{k}^{k+p} \varkappa_i (V_i - V_{i+1})\right) \leq E(W_k) - E(W_{k+p-1}) \leq$$
$$\leq 2\, E(W_k) \qquad /1.59/$$

tekintetbe véve /1.55/-öt. Ezért /1.52/-ben

$$E(\beta(a,b)) \leq \frac{2\, E(W_k)}{V_b - V_a} \qquad /1.60/$$

ami állitásunkat bizonyitja.

<u>1.1.1 Megjegyzés:</u> Nyilvánvalóan szó szerint ugyanigy bizonyithatunk monoton fogyó algebra család mellett is, mindkét tételünk érvényben marad.

<u>1.1.2 Megjegyzés:</u> Nyilvánvalóan vehetünk a β sorozathoz egy $\{V_n\}_{n=k}^{\infty}$ függvénysorozatot is, csupán az a lényeg, hogy az 1-5 feltétel teljesüljön.

<u>1.1.3 Megjegyzés:</u> Az ε_i sorozat nem szükségképpen áll elő β_i függvényeként, csupán $\mathcal{F}_n^{\beta}$ mérhető.

<u>1.1.4 Megjegyzés:</u> A $\{\beta_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ folyamatnak nem kell sem független növekményünek, sem Markov folyamatnak lennie.

1.2. LJUNG TÉTEL ÉS TÉMAKÖRE

Legyen $A: R^n \times R^m \to R^n$ egyenletesen folytonos leképezés melyre

1/ tetszőleges $(x,\beta),(y,\beta) \in R^n \times R^m$ mellett teljesül az

$$\| A(x,\beta) - A(y,\beta)\| \leq \varrho \cdot \|x-y\| , \quad 0 \leq \varrho < 1 \qquad /1.61/$$

és

2/ $\beta \in R^m$ tetszőleges rögzitésével nyert $A(\cdot,\beta)$ kontrakciónak a fix pontja essék egy $K \subset R^n$ kompakt halmazba.

Legyen $Q: R^n \times R^m \to R^m$ folytonos leképezés.

Legyen $\{\varepsilon_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ független, azonos eloszlású 0 várható értékü véges szórású folytonos sürüségfüggvényü valószinüségi változók sorozata, legyen továbbá $\{\gamma_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ pozitiv számokból álló számsorozat, melyre $\gamma_k \to 0$ ha $k \to \infty$.

Jelöljük $\mathcal{F}_k$ -val a $\sigma(\{\varepsilon_i\}_{i=-\infty}^{k})$ monoton növekedő σ -algebra sorozatot.

Legyen k_0 egy rögzitett egész, (x_{k_0},β_{k_0}) pedig egy $\mathcal{F}_{k_0}$ mérhető, $n+m$ - dimenziós vektorváltozó, melynek normanégyzete véges várható értékü.

Képezzük $k \geq k_0$ esetén a

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \gamma_k \cdot Q(x_{k+1}, \beta_k)$$

$$x_{k+1} = A(x_k, \beta_k) + \varepsilon_{k+1}$$

/1.62/

Markov folyamatot.

Tegyük fel, hogy az /1.62/ Markov folyamat $P((x_k,\beta_k), k+1, A)$, X komponensre vonatkozó átmenet valószinüségére teljesül, hogy

$$\int_{R^n} \|Q(x_{k+1}, \beta_k)\|^2 P((x_k,\beta_k), k+1, dx_{k+1}) \leq L \cdot (\|x_k\|^2 + 1) \qquad /1.63/$$

Jelöljük P^*_β -val a $\beta \in R^m$ rögzitésével kapott

$$x^*_{k+1} = A(x^*_k, \beta) + \varepsilon_{k+1} \qquad /1.64/$$

egyenlet stacionárius megoldásának R^n -en generált valószinüségi mmértékét, és képezzük az

$$f(\beta) := \int_{R^n} Q(x, \beta)\, P^*_\beta(dx) \qquad /1.65/$$

R^m-en értelmezett függvényt.

<u>1.2.1 Tétel</u> Tegyük fel, hogy a

$$\dot\beta = f(\beta) \qquad /1.66/$$

egyenlet megoldásai globálisan aszimptotikusan stabilak egy $H \subset R^m$ kompakt vonzási tartománnyal. Akkor

1/ $\sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma_k < \infty$ esetén az /1.62/ folyamat trajektóriái 1 valószinüséggel korlátosak.

2/ $\sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma_k = \infty$ esetén a trajektóriák 1 valószinüséggel tartanak a H-hoz.

E tétel L. Ljung nevéhez fűződik. Tanulmányunkban ezt módositott alaplemmánk illetve tételünk segitségével bizonyitjuk.

Tanulmányunk bevezetőjében láttuk, hogy egy /1.66/ alakú differenciálegyenlet H vonzási tartományához mindig megadható egy folytonos Ljapunov függvény, legalább is H egy kompakt környezetében.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges β m-dimenziós valószinűségi változóhoz megadható olyan V Ljapunov függvény az /1.66/ egyenlethez, hogy

1/ $E(V(\beta)) < \infty$

2/ $E\left(\left(\frac{\partial V(\beta)}{\partial \beta} f(\beta)\right)^2\right) < \infty$.

<u>1.2.1 Lemma:</u> Megadható tetszőleges $\beta : \Omega \to R^m$ mellett olyan V Ljapunov függvény a globálisan aszimptotikusan stabil /1.66/ egyenlethez, mely teljesiti 1/-et és 2/-t.

<u>Bizonyitás:</u> Tudjuk, hogy a H körüli kompakt környezetben létezik folytonos Ljapunov függvény. Akkor ezen kompakt környezetnek alkalmas, H ε -sugarú környezetén kivüli részén megadható egy végtelenhez differenciálható Ljapunov függvény is, legyen ez V_0. Vegyük e V_0 -nak egy $\{V_0 = h\}$ szintvonalát, ami egy végtelenhez differenciálható S_h görbe, melyet az /1.66/ minden megoldása pontosan egy pontban metsz át.

Vegyük a $g(s) = e^{-s}$ függvényt, és képezzük a $K_1 : R^m \setminus H \to R^-$ függvényt az alábbi definicióval:

Legyen $z \in R^m \setminus H$, vegyük az /1.66/ egyenlet

$$\beta(0) = z \qquad /1.67/$$

kezdeti feltételnek eleget tevő megoldását, melyet jelöljünk $\beta(t, 0, z)$ -vel.

A fentiek szerint van egyetlen olyan $t(z)$, hogy

$$\beta(t(z), 0, z) \in S_h \qquad /1.68/$$

teljesül. Legyen

$$K_1(z) = \varrho(-t(z)). \qquad /1.69/$$

Ha már most a K_1 függvényt integráljuk a trajektóriák mentén, önmagát kapjuk, ha a $t=0$ -t a $K_1(z)=1$ azaz S_h -ba választjuk, és itt az integrandus 1 értéket kap.

Ha a $K_1(\beta)$ véges várható értékü, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor először nézzük meg, hogy mi a kapcsolat egy $\varphi: R^- \to R^-$ monoton függvényre a φ és az általa generált V között:

Ha t egy, a 0-ban S_h -ról induló megoldásgörbe paramétere, akkor K_1 definicióját tekintetbe véve,

$$V_\varphi(\beta(t)) - V_\varphi(\beta(0)) = \int_0^t \varphi(-e^{-s})\,ds = \int_1^{-e^{-t}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \qquad /1.70/$$

Természetesen ebből nyilvánvaló becslés segitségével kapjuk, hogy

$$V_\varphi(\beta(t)) - V_\varphi(\beta_0) \leq -\varphi(-e^{-t}) \qquad /1.71/$$

midőn $t \to \infty$, avagy, $\|\beta(t)\| \to -\infty$.

Vegyük most tehát a K_1 függvény $F(x)$ eloszlás függvényét, ami

$$F(\lambda) = P\{K_1 \leq \lambda\}, \qquad /1.72/$$

és $1>\alpha>0$ -ra képezzük a

$$\varphi_0(x) = \max\left\{-\frac{1}{F(x)^\alpha}, x\right\}, \quad x \leq 0 \qquad /1.73/$$

függvényt, $x \to -\infty$. Ha sima függvényre van igényünk, vegyünk egy sima függvényt, mely az $\frac{1}{F(x)^\alpha}$ és $\frac{1}{F(x)^{\alpha/2}}$ közé esik /ilyen bizonyosan található/.

E φ_0 függvénnyel az /1.70/-es formula előállitja a kivánt V -t, mely differenciálható éppen annyiszor, ahányszor f. Szükség esetén simitható.

Ha a φ négyzetesen integrálhatóságára is igényt tartunk, akkor $\alpha < \frac{1}{2}$ -et választunk, ha pedig minden momentumra szükségünk van, akkor az $\ln F(x)$ -et kell választani.

<u>1.2.1 Megjegyzés</u> A simitásra a jól ismert

$$\psi(x-y) = C(\varepsilon) \cdot e^{-\frac{1}{1-\frac{\|x-y\|^2}{\varepsilon^2}}}, \quad (x,y) \in R^m \times R^m \qquad /1.75/$$

függvény alkalmas, melynek rögzitett x mellett y-ban az integrálja 1 $(C(\varepsilon)$ -t ez határozza meg/, és az ezzel felirt simitó konvolució igen jól kezelhető a deriváltak, maradéktagok becslésénél.

1.2.1 Az átmenetvalószinüségek aszimptotikus viselkedése

Jelöljük P_ε -al az /1.62/-ben szereplő ε_k valószinüségi változó által az R^n Borel halmazain generált valószinüségi mértéket.

Ha $B\in \mathcal{B}(R^n)$ és x_k, β_k rögzitettek, akkor az /1.62/ folyamat x_{k+1} komponensére vonatkozó átmenetvalószinüségét a

$$P(x_{k+1}\in B\,|\,\beta_k, x_k) := P_\varepsilon(B- A(\beta_k, x_k)) \qquad /1.76/$$

adja meg.

Ha pedig $A\times B\in \mathcal{B}(R^n\times R^m)$ Borel halmazokat rögzitünk, akkor a folyamat átmenet-valószinüsége a

$$P((x_k,\beta_k), k+1, A\times B) = P(A\cap Q^{-1}(\tfrac{1}{\gamma_k}(B-\beta_k), \beta_k)\,|\,x_k, \beta_k) \qquad /1.77/$$

alakot ölti, ahol a jobb oldalon szereplő teljes inverz képet a $Q_{\beta_k}(x) := Q(x, \beta_k)$ leképezésre értjük.

<u>1.2.2 Lemma:</u> Legyenek $\varepsilon>0$, $\delta>0$ és $A\in \mathcal{B}(R^n)$ tetszőlegesek. Ezekhez létezik olyan k_0 hogy minden $k>k_0$ esetén

1/ $|P((x_k,\beta_k), k+1, A\times G_\varepsilon(\beta_k)) - P(A\,|\,x_k,\beta_k)| < \delta$

2/ $P((x_k,\beta_k), k+1, A\times (R^m\setminus G_\varepsilon(\beta_k))) < \delta$ /1.78/

teljesül. Tetszőleges $r>0$ -hoz megadható k_0 úgy is, hogy /1.78/ egyenletesen teljesül tetszőleges $(x_k,\beta_k)\in G_r(0)\times R^m$ -ben.

Bizonyitás: Miután $\gamma_k \to 0$, a

$$(G_\varepsilon(\beta_k) - \beta_k)\frac{1}{\gamma_k} \longrightarrow R^m \quad \text{és}$$

$$((R^m \setminus G_\varepsilon(\beta_k)) - \beta_k)\frac{1}{\gamma_k} \longrightarrow \emptyset. \qquad /1.79/$$

Az /1.78/-beli ősképekre tehát

$$Q^{-1}((G_\varepsilon(\beta_k) - \beta_k)\frac{1}{\gamma_k}, \beta_k) \longrightarrow R^n \quad \text{és}$$

$$Q^{-1}(((R^m \setminus G_\varepsilon(\beta_k)) - \beta_k)\frac{1}{\gamma_k}, \beta_k) \longrightarrow \emptyset \qquad /1.80/$$

teljesül. A mérték üres halmazon való monoton folytonossága folytán tehát $A \in \mathcal{B}(R^n)$ mellett érvényes a

$$P((x_k, \beta_k), k+1, A \times (R^m \setminus G_\varepsilon(\beta_k))) \leq P((x_k, \beta_k), k+1, R^n \times (R^m \setminus G_\varepsilon(\beta_k))) \to 0,$$

ami az állitást teljes egészében bizonyitja.

A $G_r(0) \times R^m$ -en való egyenletesség részben az /1.61/ részben az /1.62/-beli $A(x, \beta)$ leképezés egyenletes folytonosságának következménye.

Legyenek

$$B_\varepsilon^{k,\beta} := \{\omega \mid \beta_k \in G_\varepsilon(\beta)\} \qquad /1.81/$$

$$C_\varepsilon^{k,\beta} := \{\omega \mid \beta_k \in R^m \setminus G_\varepsilon(\beta)\} \quad \text{és} \qquad /1.82/$$

$$A^k := \{\omega \mid x_k \in A\} \qquad /1.83/$$

ahol $A \in \mathcal{B}(R^n)$ Borel halmaz.

Belátjuk az alábbi lemmát:

<u>1.2.3 Lemma:</u> Tetszőleges $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $p > 0$ egészhez, $A \in \mathcal{B}(R^n)$ -hez és $r > 0$ valóshoz létezik olyan k_0, hogy $k > k_0$ esetén

1/ $|P(A^{k+p} \cap \bigcap_{i=k}^{k+p} B_\varepsilon^{i,\beta_k} | x_k, \beta_k) - P_{\beta_k}(A^{k+p} | x_k)| < \delta$

2/ $P(A^{k+p} \cap C_\varepsilon^{k+p} \cap \bigcap_{i=k}^{k+p-1} B_\varepsilon^{i,\beta_k} | (x_k, \beta_k)) < \delta$ /1.84/

egyenletesen $(x_k, \beta_k) \in G_r(0) \times R^m \subset R^n \times R^m$.

<u>Bizonyitás:</u> Természetes következménye az 1.2.2 lemmának, szukcesszíven alkalmazva a Chapmen-Kolmogorov egyenletet.

<u>1.2.2 Megjegyzés:</u> A $P_\beta(A^{k+p} | x_k)$ az /1.64/ egyenlettel megadott folyamat p-lépéses átmenetvalószinüsége.

<u>1.2.4 Lemma:</u> Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $p > 0$ -hez megadható olyan $k > k_0$ hogy

$$P\{ \sup_{0 \le i,j \le p} \| \beta_{k+i} - \beta_{k+j} \| > \varepsilon \} < \varepsilon . \qquad /1.85/$$

<u>Bizonyitás:</u> Elegendő ezt belátni a $p=1$ -re, mert akkor p-re $\frac{\varepsilon}{p}$-vel az állitás már következik.

$p=1$-re pedig induljunk ki az 1.2.2 Lemmából. Mivel az /1.62/ egyenlet X komponense az

$$x_{k+1} = A(x_k, \beta_k) + \varepsilon_{k+1} \qquad /1.86/$$

egyenletnek tesz eleget, figyelembe véve az A kontrakció voltát, érvényes az

$$E(\| x_{k+1} \|^2)^{1/2} \le \rho \cdot E(\| x_k \|^2)^{1/2} + E(\| \varepsilon_k \|^2)^{1/2} \qquad /1.87/$$

becslés, amiből elég nagy k -ra

$$E\left(\|x_k\|^2\right)^{1/2} \leq \frac{1+\delta_1}{1-\varrho} \cdot E\left(\|\varepsilon_k\|^2\right)^{1/2}$$ /1.88/

ahol az $d := E(\|\varepsilon_k\|^2)^{1/2}$ nem függ k-tól.

Ezért

$$P(\|x_k\| > \lambda) \leq \frac{(1+\delta_1)^2 \cdot d^2}{(1-\varrho)^2 \cdot \lambda^2}$$ /1.89/

a Csebisev egyenlőtlenség alapján.

Ebből következik, hogy elég nagy $k > k_0$ esetén

$$\int\limits_{(R^n \setminus G_\lambda(0)) \cap R^m} P(A^{k+1} \cap B^{k+1} \mid x_k, \beta_k)\, P(dx_k, d\beta_k) < \eta$$ /1.90/

ahol η tetszőlegesen kicsi pozitiv szám.

Ámde ekkor a 2.2.2 lemma második egyenlőtlenségét tekintetbe véve /ld. /1.78//

$$\int\limits_{R^n \times R^m} P(C_\varepsilon^{k+1,\beta_k} \mid x_k, \beta_k)\, P(dx_k, d\beta_k) \leq$$

$$< \int\limits_{G_\lambda(0) \times R^m} P(C_\varepsilon^{k+1,\beta_k} \mid x_k, \beta_k)\, P(dx_k, d\beta_k) + \eta \leq$$

$$\leq \eta + \delta$$

ha k akkora, hogy az 1.2.2 lemma feltételei teljesülnek $\lambda = r$ mellett. Mivel η és δ tetszőleges, a lemmát beláttuk.

Diszkretizáljuk most a β_k valószinüségi vektor változókat ε pontossággal. Alkalmazzuk R^m -en a $z \in R^m \longrightarrow \|z\| = \sum_{i=1}^{m} |z_i|$ normát, és legyen $j \in N^m$, $j = (j_1, \dots, j_m)$ egészekből álló szám m -es. A β_k^ε -t az alábbi egyenlőség adja meg:

$$\beta_k^\varepsilon(\omega) := j\cdot\varepsilon\,, \ ha \quad \omega\in\{\|\beta_k - j\cdot\varepsilon\| < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \tag{1.91}$$

Kiszámitjuk p-hez a

$$P(A^{k+p}\,|\,\beta^\varepsilon_{k+p},\beta^\varepsilon_{k+p+1},\dots,\beta^\varepsilon_{k+1},x_k,\beta_k) \tag{1.92}$$

feltételes várható értéket, ami itt feltételes valószinüség.

Ez, mint ismeretes, kiszámitható, mint a

$$\frac{P(A^{k+p}\cap\bigcap_{i=k}^{p} B^{k+i,\,j_i\cdot\varepsilon}_{\varepsilon/2}\,|\,x_k,\beta_k)}{P(\bigcap_{i=k}^{p} B^{k+i,\,j_i\cdot\varepsilon}_{\varepsilon/2}\,|\,x_k,\beta_k)} \tag{1.93}$$

ahol a $B^{k+i,\,j_i\cdot\varepsilon}_{\varepsilon}$ -ban szereplő j_i -t a adja meg, ahol N az egészeket jelöli.

<u>1.2.5 Lemma:</u> Az /1.93/-mal definiált $P(A^{k+p}\,|\,\sigma(\{\beta_i^\varepsilon\}_{i=k+1}^{k+p},x_k,\beta_k))$ feltételes várható értékhez $A\in\mathcal{B}(R^n)$ -ben egyenletesen megadható tetszőleges $\varepsilon>0$ -hoz olyan $k>k_0$, hogy $k>k_0$ esetén

$$E(\|P(A^{k+p}|\sigma(\{\beta_i^\varepsilon\}_{i=k+1}^{k+p},x_k,\beta_k)) - P_{\beta^\varepsilon_{k+p}}(A^{k+p}|x_k)\|^2)^{1/2} < \varepsilon. \tag{1.94}$$

/Megjegyezzük, hogy $P_{\beta^\varepsilon_{k+p}}(A^{k+p}|x_k)$ a 2.2.2-ben definiált valószinüség a β_{k+p} helyen./

<u>Bizonyitás:</u> Először is az /1.93/-mal definiált valószinüségi változó értékei 0 és 1 között vannak minden ω -ra.

Nézzük meg ezután az /1.93/ nevezőjében szereplő kifejezést a $j_i = j\in N^m$ mellett:

Az 1.2.3 lemmából következik, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{B}(R^n)$ mellett ha értelmezzük a $\Phi_k(A,\omega)$ valószinüségi változót a

$$\Phi_k(A,\omega) := P(A^{k+p} \cap \bigcap_{i=1}^{p} B_{\varepsilon/2}^{k+i, j\cdot\varepsilon} \mid x_k(\omega), \beta_k(\omega)),$$
$$\text{ha } \omega \in \{ \tfrac{2j-1}{2}\varepsilon < \beta_k \le \tfrac{2j+1}{2}\varepsilon \} \qquad /1.95/$$

akkor a

$$\Phi_k(A,\omega) \longrightarrow P_{\beta_k(\omega)}(A^{k+p} \mid x_k(\omega)),\ k \to \infty, \qquad /1.96/$$

1 valószinüséggel. Ebből következik, hogy megadható $\varepsilon_1 > 0$-hoz és $\delta > 0$-hoz olyan $k > k_0$ hogy

$$P\{\Phi_k(R^n,\omega) < 1-\varepsilon_1\} < \delta_1. \qquad /1.97/$$

Ebből következik, tekintetbe véve az /1.93/-at és /1.96/-ot, hogy:

$$|P(A^{k+p} \mid \sigma(\{\beta_{k+i}^{\varepsilon}\}_{i=1}^{p}, x_k, \beta_k) - P_{\beta_k(\omega)}(A^{k+p} \mid x_k(\omega))| < \delta_2, \qquad /1.98/$$

az $\bigcup_{j\in N^n} \{\beta_{k+i}^{\varepsilon} = j\cdot\varepsilon,\ 1 \le i \le p,\ \beta_k \in \operatorname{int} G_{\varepsilon/2}(j\cdot\varepsilon)\} \setminus \{\Phi_k(R^n,\omega) < 1-\varepsilon_1\}$

halmazon. Tekintetbe véve az /1.91/-ben szereplő normát az /1.98/ érvényben marad $2\delta_2$ -vel a jobb oldalon a

$$\{\sup_{0\le i,j\le p} \|\beta_{k+i} - \beta_{k+j}\| < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \setminus \{\Phi_k(R^n,\omega) < 1-\varepsilon_1\} \qquad /1.99/$$

halmazon is, ha $\varepsilon/2$ elég kicsi.

Ámde az 1.2.4 lemma értelmében a

$$P(\{\sup_{0\le i,j\le p} \|\beta_{k+i} - \beta_{k+j}\| < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \setminus \{\Phi_k(R^n,\omega) < 1-\varepsilon_1\}) \ge 1 - \tfrac{\varepsilon}{2} - \delta_1,$$

ahol /1.98/-at tekintetbe vettük.

Ezért tehát az /1.99/-ből következik, felhasználva a $P_{\beta_k}(A^{k+p}|x_k, \omega)$ folytonosságát, hogy $k \to \infty$ esetén az /1.93/-al definiált feltételes valószinüség A-ban egyenletesen mértékben tart az /1.94/-ben szereplő $P_{\beta^{k+p}(\omega)}(A^{k+p}|x_k(\omega))$ valószinüségi változóhoz. Tekintetbe véve azonban, hogy az egész valószinüségi változó legfeljebb 1 értéket vehet fel, következik az /1.94/-es állitás.

<u>1.2.2 Tétel:</u> Ha $\sigma(\beta_k, \beta_{k-1}, \ldots) =: \mathcal{F}_k^{\beta}$, akkor az

$$E\left(\| P(x_k \in A | \mathcal{F}_k^{\beta}) - P^*_{\beta_k(\omega)}(A) \|^2\right)^{1/2} \to 0, \qquad /1.100/$$

ahol P^* a β_k rögzitésével nyert, /1.64/-nél definiált mérték.

<u>Bizonyitás:</u>

Ehhez elegendő azt meggondolni, hogy $p \to \infty$ -re a

$$P_{\beta_k}(A^{k+p}|x_k) \longrightarrow P^*_{\beta_k}(A) \qquad /1.101/$$

hiszen az /1.64/ folyamat stacionárius megoldásának mértékéhez tart, és azt, hogy a feltételes várható érték L_2 -ben folytonos. Ezért, ha az /1.100/-ban a várható értéket először a $\sigma(\{\beta_{k-i}^{\varepsilon}\}_{i=0}^{p-1}, \beta_{k-p}, x_{k-p})$ -re végezzük el, és tekintetbe vesszük, hogy x_{k-p} -től az /1.99/ az /1.101/ konvergencia miatt elég nagy p-re alig függ, ezért a 2.2.5 lemmából /1.100/ következik.

1.2.2 A Ljung tétel bizonyitása

Tegyük fel, hogy megadható olyan $V: R^m \to R^+$ Ljapunov függvény, melyre teljesülnek az alábbiak:

1/ $V(\beta) \to \infty$ ha $\|\beta\| \to \infty$

2/ $\frac{\partial V(\beta)}{\partial \beta} \cdot f(\beta) \to -\infty$ ha $\|\beta\| \to \infty$.

3/ $E\left(\left| \int_{R^n} \frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} \cdot Q(x_{k+1}, \beta_k) P(dx_{k+1} | x_k, \beta_k) \right|^2\right) < C$

a folyamatra, és legyen

egyenletesen integrálható.

4/ Legyen továbbá az

$$M(\beta_{k+1}, \beta_k) := \left(V(\beta_{k+1}) - \gamma_k \frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} \cdot Q(x_{k+1}, \beta_k) - V(\beta_k)\right) \frac{1}{\gamma^{1+\alpha}}$$

$\alpha > 0$ -val korlátos négyzet-integrálú, azaz:

$$E\left(M^2(\beta_{k+1}, \beta_k)\right)^{1/2} \leq C$$

5/ $0 < \varrho < 1$ -el

$$-\varrho E\left(\frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} \cdot f(\beta_k)\right) \geq E\left(\left|\left(E(M(\beta_{k+1}, \beta_k) | \mathcal{F}_k\right)\right|\right).$$

Állitás: Ha az /1.66/ egyenlethez található 1-5-öt teljesitő Ljapunov függvény, akkor

$\sum_{k_0}^{\infty} \gamma_i \to \infty$, $\gamma_k \to 0$ esetén a

folyamat 1 valószinüséggel konvergál az (1.66) egyenlet konvergenciahalmazához.

Bizonyitás: Miután a 3/ pont szerint az

$$\left(\int_{R^n} \frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} Q(x_{k+1}, \beta_k) P(dx_{k+1} | x_k, \beta_k)\right)^2 =: \varphi^2(x_k, \beta_k) \qquad /1.102/$$

függvény egyenletesen integrálható, ezért -hoz van olyan $R(\varepsilon)$, hogy

$$\int_{\{|\varphi(x_k, \beta_k)| > R(\varepsilon)\}} \varphi^2(x_k, \beta_k) P(dx_k, d\beta_k) \leq \frac{E(\varphi^2(\beta_k, x_k))}{R(\varepsilon)} \qquad /1.103/$$

másrészt van olyan elég nagy $k > k_0$, hogy a 2.2.2 Tétel miatt az

$$E\left(|E(\varphi(x_k, \beta_k)\chi_{\{\varphi(x_k, \beta_k) \leq R(\varepsilon)\}} | \mathcal{F}_k^\beta) - \int \varphi(x_k, \beta_k)\chi_{\{\varphi \leq R(\varepsilon)\}} P^*_{\beta_k(\omega)}(dx_k)|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} R(\varepsilon) \qquad /1.104/$$

Az /1.103/ és /1.104/ együtt adja, hogy az

$$E\left(\left|\frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} \cdot f(\beta_k) - E\left(\frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} \cdot Q(x_{k+1}, \beta_k) | \mathcal{F}_k^\beta\right)\right|^2\right) \longrightarrow 0 \qquad /1.105/$$

ha $k \to \infty$. Legyen $R(\varepsilon) = 4\, E(\varphi^2)$.

Irjuk fel most az

$$E(V(\beta_{k+1}) - V(\beta_k) | \mathcal{F}_k^\beta) = \gamma_k E\left(\frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} Q(x_{k+1}, \beta_k) | \mathcal{F}_k^\beta\right) +$$

$$+ E\left(V(\beta_{k+1}) - \gamma_k \frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} Q(x_{k+1}, \beta_k) - V(\beta_k) | \mathcal{F}_k^\beta\right) =$$

$$= \gamma_k \cdot \frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} \cdot f(\beta_k) + \gamma_k \left(E\left(\frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} Q(x_{k+1}, \beta_k) | \mathcal{F}_k^\beta\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} f(\beta_k)\right) + \gamma_k^\alpha E(M(\beta_{k+1}, \beta_k) | \mathcal{F}_k^\beta) =$$

$$= \gamma_k \cdot \frac{\partial V(\beta_k)}{\partial \beta_k} \cdot f(\beta_k) + \gamma_k\, \varepsilon_k(\omega)$$

ahol a 4/ feltételből és az /1.105/-ből következik, hogy $E(\varepsilon_k^2)^{1/2} \to 0$. Ezért teljesülnek az 1.1.2 alaplemma feltételei, és az 5/ tulajdonság biztositja az 1.1.1 alaptétel feltételeit. Igy a folyamat 1 valószinüséggel tényleg konvergens.

Ha $\gamma_k \not\to 0$, akkor az 1.6 alaplemma alapján csak annyit láthatunk be, hogy a trajektóriák 1 valószinüséggel korlátosak, mert ekkor az /1.104/ nem teljesül.

Megjegyzések: Olyan V-t, amely β_k, β_{k+1} -re teljesiti a tételünk feltételeit, lehet konstruálni egy globálisan aszimptotikusan stabil rendszerhez. Ennek további csökkentésével megadható olyan $V(x, n)$ amire szükségünk van. Az egyenletes integrálhatósági feltétel viszont biztositható, ha a Q függvény globális Lipschitz-féle feltételnek tesz eleget, és $Q(0, \beta) = 0$, vagy korlátos /1.63/ feltétel/.

1.3. SZTOCHASZTIKUS ALGORITMUSOK ASZIMPTOTIKUS VISELKEDÉSE

Legyen (x_k, β_k) egy tetszőleges $(n+m)$ - dimenziós sztochasztikus folyamat. Teljesüljenek a folyamat β komponensére az alábbiak:

Létezzék olyan $V: R^m \to R^+$ folytonos függvény, mellyel

$$V(\beta_{k+1}) - V(\beta_k) \leq \gamma_k \cdot \varphi(\beta_k) + \gamma_k \cdot \varepsilon_k \ , \ k \geq k_0 \qquad /1.106/$$

ahol φ, γ_k, és ε_k -ra az alábbiak teljesülnek:

1/ $\varphi(\beta) \leq 0$ folytonos függvény az R^m -en.

2/ $\varphi(\beta)$ a $V(\beta)$ monoton függvénye.

3/ $-\varphi(\beta) \to \infty, V(\beta) \to \infty$, ha $\|\beta_k\| \to \infty$.

4/ $E(V(\beta_k)) < \infty$ minden $k > k_0$ esetén.

5/ $\gamma_k > 0$, $k \geq k_0$ -ra.

6/ Legyen ε_k négyzetének várható értéke véges.

Vezessük be az $\mathcal{F}_k := \sigma\{\{x_i, \beta_i\}_{i=k}^{-\infty}\}$ illetve $\mathcal{F}_k^{\beta} := \sigma\{\{\beta_i\}_{i=k}^{-\infty}\}$ jelöléseket.

Adjunk meg az ε_k -ra három feltételtipust; melyek mindegyike három alternativ feltételből áll:

<u>A1 feltétel:</u>

a1/ $E(\varepsilon_k^2)^{1/2} \leq C$, $k \geq k_0$ esetén, vagy

b1/ $E(E(\varepsilon_k | \mathcal{F}_k)^2)^{1/2} \leq C$, $k \geq k_0$ esetén, vagy

c1/ $E(E(\varepsilon_k | \mathcal{F}_k^{\beta})^2)^{1/2} \leq C$, $k \geq k_0$ esetén.

A2 feltétel:

a1/ $E(\varepsilon_k^2)^{1/2} \to 0,\ k \to \infty$ esetén, vagy

b2/ $E(E(\varepsilon_k | \mathcal{F}_k)^2)^{1/2} \to 0,\ k \to \infty$ esetén, vagy

c2/ $E(E(\varepsilon_k | \mathcal{F}_k^{\beta})^2)^{1/2} \to 0,\ k \to \infty$ esetén.

A3 feltétel: $0 \leq \varrho < 1$ mellett

a3/ $-\varrho \cdot E(\varphi(\beta_k)) \geq E(\varepsilon_k^+),\ k \geq k_0$ esetén, vagy

b3/ $-\varrho \cdot E(\varphi(\beta_k)) \geq E(E(\varepsilon_k | \mathcal{F}_k)^+),\ k \geq k_0$ esetén, vagy

c3/ $-\varrho \cdot E(\varphi(\beta_k)) \geq E(E(\varepsilon_k | \mathcal{F}_k^{\beta})^+),\ k \geq k_0$ esetén.

Legyen $F = \{\varphi = 0\},\quad F_\ell = \{\varphi \geq -\ell \cdot c\}$

2.3.1 Tétel: Tegyük fel, hogy $\sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma_k = \infty$, ekkor

1/ Az A1 feltétel teljesülése esetén

$$P\{\liminf_i \varrho(\beta_i, F_\ell) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(\ell-1)^2} \qquad /1.107/$$

2/ az A2 feltétel teljesülése esetén

$$P\{\liminf_i \varrho(\beta_i, F) = 0\} = 1 \qquad /1.108/$$

3/ az A1 és A3 feltételek teljesülése esetén

$$P\{\lim_i \varrho(\beta_i, F_\ell) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(\ell-1)^2} \qquad /1.109/$$

4/ az A2 és A3 feltéelek teljesülése esetén

$$P\{\lim_i \varrho(\beta_i, F) = 0\} = 1 \qquad /1.110/$$

Bizonyitás: A bizonyitáshoz elegendő meggondolni, hogy $\mathcal{F}_k^{\beta} \subset \mathcal{F}_k$, továbbá

$$E(\varepsilon_k^2)^{1/2} \geq E(E(\varepsilon_k|\mathcal{F}_k)^2)^{1/2} \geq E(E(\varepsilon_k|\mathcal{F}_k^{\beta})^2)^{1/2} \qquad /1.111/$$

nyilvánvaló állitásokat, illetve az

$$E(\varepsilon_k^+) \geq E(E(\varepsilon_k|\mathcal{F}_k)^+) \geq E(E(\varepsilon_k|\mathcal{F}_k^{\beta})^+) \qquad /1.112/$$

állitásokat, melyekből kiderül, hogy az alternativák fokozatosan egyre gyengébb feltételeket szabnak a tételhez.

Az /1.111/ és /1.112/ pedig megmutatják, hogy az A1, A2 feltételek a 2.1.2 alaplemma feltételeit biztositják, mig az A3 a 2.1.1 alaptétel feltételeit biztositja. Az /1.108/ és /1.110/ állitások a 2.1.1 következményből illetve ehhez a már idézett 2.1.1 alaptételből következnek.

Miután a müszaki alkalmazásokban igen gyakoriak a Markov folyamatok, ezért célszerü Markov folyamatok átmeneti valószinüségével is megfogalmazni a 2.3.1 tételt.

Az ε_k, mint ez az /1.106/-ból kiderül, $\varepsilon_k(\beta_{k+1}, \beta_k)$ alakú függvény lesz. Vezessük be a Markov folyamatunk átmenetvalószinüségére a

$$P((x_k, \beta_k), k+1, A \times B) := P((x_{k+1}, \beta_{k+1}) \in A \times B \mid \mathcal{F}_k) \qquad /1.113/$$

jelölést.

Legyen

$$\delta_k(\beta_k, x_k) = \int_{R^m} \varepsilon_k(\beta_{k+1}, \beta_k)\, P((x_k, \beta_k), k+1, d\beta_{k+1}) \qquad /1.114/$$

2.3.2 Tétel: $\sum_{k_0}^{\infty} \gamma_k = \infty$ esetén ha

1/ $E(\delta_k^2)^{1/2} \leq C$, akkor igaz /1.107/

2/ $E(\delta_k^2)^{1/2} \to 0$, akkor igaz /1.108/

3/ $E(\delta_k^+) \leq -\varrho E(\varphi(\beta_k))$, $0 \leq \varrho < 1$ esetén és 1/ feltétele teljesül akkor igaz /1.109/

4/ Végül $E(\delta_k^+) \leq -\varrho E(\varphi(\beta_k))$ és 2/ feltétele teljesül, akkor igaz /1.110/.

A továbbiakban hasznos lesz bevezetni két f, g m-dimenziós valószinüségi változó; V_φ eltérését, az alábbi definicióval:

$$\varrho^2_{V,\mathcal{G}}(f,g) := E\left(E(V(f) - V(g) \mid \mathcal{G})^2\right)^{1/2} \qquad /1.115/$$

ahol $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ egy σ-algebra.

Ezzel analóg módon bevezetjük a

$$\varrho^1_{V,\mathcal{G}}(f,g) := E\left(\left| E(V(f) - V(g) \mid \mathcal{G})\right|\right) \qquad /1.116/$$

eltérést is. Megjegyezzük, hogy $\varrho^2_{V,\mathcal{G}}$ is, $\varrho^1_{V,\mathcal{G}}$ is pszeudometrika, melyre

1/ $\varrho^2_{V,\mathcal{G}} \geq 0$, $\varrho^1_{V,S} \geq 0$.

2/ $\varrho^i_{V,\mathcal{G}}(f,g) = \varrho^i_{V,\mathcal{G}}(g,f)$, $i=1,2$

3/ $\varrho^i_{V,\mathcal{G}}(f,g) \leq \varrho^i_{V,\mathcal{G}}(f,h) + \varrho^i_{V,\mathcal{G}}(g,h)$, $i=1,2$

axiomák teljesülnek, csupán az nem teljesül, hogy -ból $\varrho^i_{V,\mathcal{G}}(f,g) = 0$, $i=1$ v. 2 -ből $f=g$ következzék.

Ezután egy gyakorlatban hasznos tételt bizonyitunk be, mely bizonyos értelemben analóg a determinisztikus rendszerekre érvényes olyan tipusú tétellel, hogy ha a linearizált rendszer elég stabil, akkor az eredeti rendszer is stabil.

Legyenek $\Phi_j, \Psi_j : R^m \times R^n \to R^m, j \in N,$ adott folytonos függvények, és legyen $\{\eta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ egy nem szükségképpen stacionárius véges szórású n-dimenziós folyamat.

Tegyük fel, hogy a

$$\beta_{j+1} = \Phi_j(\beta_j, \eta_{j+1}), \quad -\infty < j < +\infty \qquad /1.117/$$

folyamathoz megadható /1.106/-nak eleget tevő V Ljapunov függvény.

Képezhetjük a

$$\hat{\beta}_{j+1} = \Psi_j(\hat{\beta}_j, \eta_{j+1}), \quad -\infty < j < +\infty \qquad /1.118/$$

folyamatot is.

Legyen $\mathcal{F}_k = \sigma\{\{\eta_j\}_{j=-\infty}^{k}\}$ és $\mathcal{F}$ a teljes σ-algebra. Bevezetünk három feltételtipust.

<u>K1 feltétel:</u>

$$\frac{1}{\gamma_j} \varrho^2_{V,\mathcal{F}}\left(\Phi_j(\beta_j, \eta_{j+1}), \Psi_j(\hat{\beta}_j, \eta_{j+1})\right) \le C_1, \; j \ge k_0 \text{ esetén,}$$

<u>K2 feltétel:</u>

$$\frac{1}{\gamma_j} \varrho^2_{V,\mathcal{F}}\left(\Phi_j(\beta_j, \eta_{j+1}), \Psi_j(\hat{\beta}_j, \eta_{j+1})\right) \to 0, \; j \to \infty \text{ esetén}$$

<u>K3 feltétel:</u> $r > 0$ -val teljesül az

$$\frac{1}{\gamma_j} \varrho^1_{V,\mathcal{F}}\left(\Phi_j(\beta_j, \eta_{j+1}), \Psi_j(\hat{\beta}_j, \eta_{j+1})\right) \le r \cdot E(\varepsilon_j^+). \qquad /1.119/$$

Ekkor érvényes az alábbi tétel:

2.3.3 Tétel: Tegyük fel, hogy az /1.117/ folyamat V Ljapunov függvénye olyan, hogy

1/ Teljesiti az A1, illetve A2 feltételt, és teljesül K1 feltétel. Ekkor igazak a

$$P\{\liminf_i \varrho(\hat{\beta}_i, \{\varphi \geq -h(C+C_1)\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(h-1)^2} \qquad /1.120/$$

illetve

$$P\{\liminf_i \varrho(\hat{\beta}_i, \{\varphi \geq -h(C_1)\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(h-1)^2} \qquad /1.121/$$

állitások.

2/ teljesül az A2 és K2 feltétel, akkor

$$P\{\liminf_i \varrho(\hat{\beta}_i, F) = 0\} = 1. \qquad /1.123/$$

3/ Ha az 1/ teljesülése mellett teljesül még A3 és K3, akkor

$$P\{\lim_i \varrho(\hat{\beta}_i, \{\varphi \geq -h(C+C_1)\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(h-1)^2} \qquad /1.124/$$

illetve

$$P\{\lim_i \varrho(\hat{\beta}_i, \{\varphi \geq -h \cdot C_1\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(h-1)^2} \qquad /1.125/$$

4/ Végül ha 2/ teljesülése mellett K3 is igaz, akkor

$$P\{\lim_i \varrho(\hat{\beta}_i, F) = 0\} = 1. \qquad /1.126/$$

Bizonyitás: Elegendő megjegyezni, hogy

$$V(\hat{\beta}_{j+1}) - V(\hat{\beta}_j) = V(\beta_{j+1}) - V(\beta_j) + \{[V(\hat{\beta}_{j+1}) - V(\beta_{j+1})] - [V(\hat{\beta}_j) - V(\beta_j)]\} \qquad /1.127/$$

alakban irhatjuk a szóban forgó eltérést, és ezután K1, K2 épp annak feltételei, hogy mikor nem romlik el A1 ill. A2.

A K3 feltételnél kihasználtuk azt, hogy tudjuk, hogy $\sum_{j=k}^{\infty} \gamma_j \cdot \varepsilon_j^+$ konvergens 1 valószinüséggel, és a konvergencia-tételhez ezt elegendő biztositani /ld. a 2.1.1 alaptételt/.

Megjegyzés: A tétel erőssége abban áll, hogy feltételei várható értékekre vonatkoznak, és konvergenciát lehet velük bizonyitani.

1.4. KÖZELITŐ ALGORITMUSOK

Sztochasztikus algoritmusoknak, de különösen szűrési algoritmusoknak jellegzetessége, hogy nem konvergálnak sem pontonkénti értelemben, de általában még normában sem.

Azt azonban ilyen esetekben is fontos tudni, hogy két ilyen algoritmus különbsége hogyan viselkedik.

Képezzünk az előző pont /1.117/ folyamatából most egy $2m$ -dimenziós folyamatot az alábbi úton:

Tegyük fel, hogy az x_j, y_j folyamatok eleget tesznek $j > k_0$ esetén az /1.118/ egyenletnek. Ekkor az

$$(x_{k+1}, y_{k+1} - x_{k+1}) = (\Phi_k(x_k, \eta_{k+1}), \Phi(y_k, \eta_{k+1}) - \Phi(x_k, \eta_{k+1})) \qquad /1.128/$$

2m-dimenziós folyamat ekvivalens az

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi_k(x_k, \eta_{k+1}) \\ y_{k+1} &= \Phi_k(y_k, \eta_{k+1}) \end{aligned} \qquad /1.129/$$

folyamatpárral.

Tegyük fel, hogy az /1.128/ folyamat $y_{k+1} - x_{k+1}$ komponensének létezik a 2.3.1 tétel szerinti V Ljapunov függvénye.

Képezhetjük most az /1.118/ folyamattal az

$$(x_{k+1}, \hat{\beta}_{k+1} - x_{k+1}) = (\Phi_k(x_k, \eta_{k+1}), \Psi_k(\hat{\beta}_k, \eta_{k+1}) - \Phi(x_k, \eta_{k+1})) \qquad /1.130/$$

folyamatot is.

Tegyük fel, hogy a V Ljapunov függvénnyel képezett

$$\varrho^2_{V,\mathcal{F}}(y_{k+1} - x_{k+1}, \hat{\beta}_{k+1} - x_{k+1}) \quad \text{és}$$

$$\varrho^1_{V,\mathcal{F}}(y_{k+1} - x_{k+1}, \hat{\beta}_{k+1} - x_{k+1}) \qquad /1.131/$$

pszeudo-távolságok teljesitik az előző pont K1, K2 és K3 feltételek valamelyikét. Ekkor az alábbi tétel érvényes:

<u>2.4.1 Tétel:</u> Tegyük fel, hogy az /1.128/ folyamathoz tartozó V Ljapunov függvényre az /1.106/-ban szereplő γ_k -ból képezett sor divergens.

Ha teljesül

1/ az A1 illetve A2 feltétel és /1.131/-re a K1 feltétel, akkor

$$P\{\liminf_i \rho(\hat{\beta}_i - x_i, \{\varphi \geq -h(C+C_1)\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(h-1)^2} \qquad /1.132/$$

illetve

$$P\{\liminf_i \rho(\hat{\beta}_i - x_i, \{\varphi \geq -hC_1\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(h-1)^2} \qquad /1.133/$$

igaz.

2/ Ha az A2 és K2 feltételek teljesülnek, akkor

$$P\{\liminf_i \rho(\hat{\beta}_i - x_i, F) = 0\} = 1 \qquad /1.134/$$

3/ Ha az 1/ feltételeinek teljesülése mellett A3 és K3 is teljesül, akkor

$$P\{\lim_i \rho(\hat{\beta}_i - x_i, \{\varphi \geq -h(C+C_1)\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(h-1)^2} \qquad /1.135/$$

illetve

$$P\{\lim_i \rho(\hat{\beta}_i - x_i, \{\varphi \geq -h \cdot C_1\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{(h-1)^2} \qquad /1.136/$$

igaz.

4/ végül ha A3 és K3 teljesülnek, akkor

$$P\{\lim_i \rho(\hat{\beta}_i - x_i, F) = 0\} = 1 \qquad /1.137/$$

igaz.

<u>2.4.1 Megjegyzés:</u> Ha a $\varphi(x-y)=0$ csak $x=y$ esetén, akkor a 2.4.1 tétel az algoritmusok egymáshoz tartását bizonyitja.

<u>2.4.2 Megjegyzés:</u> Ha itt az /1.118/ algoritmus az /1.117/ egy közelitése, és a közelitő algoritmusról be tudjuk látni, hogy stabil, akkor a 2.4.1 tétel szerinti felbontásban az eredeti algoritmus is stabil, ha a két algoritmus V-távolságai elég kicsik, és a közelités jó lesz.

<u>2.4.1 Következmény:</u> Az 1979-es OMFB tanulmányunkban foglalkoztunk az [10]-ben is tárgyalt

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \Phi(x_k, k) + w_k \\
z_k &= h(x_k, k) + v_k
\end{aligned}
\qquad /1.138/
$$

rendszer szürési problémájával. Legyenek itt $\Phi(\cdot, k): R^n \to R^n$, $h(\cdot, k): R^m \to R^m$ háromszor folytonosan differenciálható függvények, v_k, w_k független azonos eloszlású, egymástól is független Gauss folyamatok.

Ha V_v ill. V_w jelöli a w_k ill. v_k kovariancia mátrixait, és V_v invertálható, továbbá a $\dfrac{\partial \Phi(x,k)}{\partial x}$ mátrix is invertálható, akkor a $z_k, z_{k-1}, \ldots, z_{k_0}$ megfigyelésből a maximum likelihood módszerrel az x_k -ra kapott előrejelzés az alábbi peremértékfeladat megoldásaként kapható meg:

$j \geq k_0$, $k > k_0$ esetén legyenek

$$f(\hat{x}_{j,k};\lambda_{j,k};j) = \Phi(\hat{x}_{j,k}, k) - V_w \cdot \Psi(j,k)^{-1} \lambda_{j,k}$$

$$g(\hat{x}_{j,k};\lambda_{j,k};j):=\Psi(j,k)^{-1}\cdot\lambda_{j,k}+\frac{\partial h^{T}(\hat{x}_{j+1,k};j+1)}{\partial x}\cdot V_{v}^{-1}\times$$
$$\times\left(z_{j+1}-h(\hat{x}_{j+1,k};j+1)\right)=$$
$$=:\tilde{g}(\hat{x}_{j,k};\lambda_{j,k};z_{j+1};j)$$

/1.139/

ahol $\Psi(j,k)=\left(\frac{\partial\Phi(\hat{x}_{j,k};j)}{\partial x}\right)^{T}$, míg $j=k_o-1$ esetén

$$f(\hat{x}_{j,k};\lambda_{j,k};j):=\hat{x}_{j,k}$$
$$g(\hat{x}_{j,k};\lambda_{j,k};j):=\lambda_{j,k}+V_{k_o}\cdot(\mu_{k_o}-\hat{x}_{j,k})$$ /1.140/

ahol $\mu_{k_o}:=E(x_{k_o})$, $V_{k_o}:=E((x_{k_o}-\mu_{k_o})^{T},(x_{k_o}-\mu_{k_o}))$.

Képezzük ekkor az

$$\hat{x}_{j+1,k}=f(\hat{x}_{j,k};\lambda_{j,k};j)$$ /1.141/
$$\lambda_{j+1,k}=g(\hat{x}_{j,k};\lambda_{j,k};j)$$

folyamatot $k_o-1\leq j\leq k$ között. A $\lambda_{k_o-1,k}=\lambda_{k,k}=0$ peremértékfeladatnak megoldása a maximum likelihood probléma megoldása is, melynek létezését bizonyitottuk.

Mint ez az [10]-ben is megtalálható, az /1.141/-hez adott problémát megoldhatjuk invariáns beágyazás segitségével közelitően, és az alábbi közelitő algoritmust nyerjük:

$$\hat{x}_{k+1}=f(\hat{x}_{k},0,k)+P(k+1)\,g(\hat{x}_{k},0,k)$$
$$P(k+1)=\left.\frac{\partial f(r(c,k),c,k)}{\partial c}\right|_{c=0}\cdot\left(\left.\frac{\partial g(r(c,k),c,k)}{\partial c}\right|_{c=0}\right)^{-1}$$ /1.142/

ahol $\left.\frac{\partial r(c,k)}{\partial c}\right|_{c=0}=:P(k)$.

Megmutattuk, hogy az egzakt megoldását az /1.141/-nek az

$$\hat{y}_{k+1} = \tilde{f}(\hat{y}_k, 0, k) + P(k+1)\, g(\hat{y}_k, 0, k)$$

$$P(k+1) = \frac{\partial \tilde{f}(r(c,k), c, k)}{\partial c}\Big|_{c=0} \cdot \left(\frac{\partial g(r(c,k), c, k)}{\partial c}\Big|_{c=0} \right)^{-1} \qquad /1.143/$$

szolgáltatja, ahol

$$\tilde{f}(x, c, k) - f(x, c, k) = \eta(c) \qquad /1.144/$$

alakú, és $\eta(c)$ és, első deriváltja pontonként 0-hoz tartanak, ha az /1.138/-ban az első három derivált 0-hoz tart.

Ha az /1.142/ és /1.143/ algoritmuspár teljesiti a 2.4.1 tétel feltételeit, akkor a két algoritmus eltérése

1/ Korlátos vagy

2/ 1 valószinüséggel ugyanabba a konvergenciahalmazba tart.

Figyelembe véve, hogy a maximum likelihood probléma megoldásai kielégitik az /1.141/ peremértékproblémát, ezek, ha a rendszer aszimptotikusan "eléggé" lineáris /0-hoz tartás teljesül az /1.144/-ben adott függvényre/, akkor mind ugyanabba a konvergenciahalmazba tartanak.

2. Folytonos rendszerek

Ebben a részben a II. fejezet diszkrét rendszerekről szóló részének eredményeit fogalmazzuk meg folytonos rendszerekre. Ahogy a diszkrét esetben is az egyik legfontosabb újdonság az I. fejezethez képest a nem független növekményü, nem Markov folyamatok stabilitásának vizsgálata volt, itt is ezen lesz a hangsúly. Természetesen, éppen ezért lesz ez a fejezet technikailag kicsit bonyolultabb.

Kiindulásként itt is egy módositott alaplemmát és egy módositott alaptételt látunk be.

Alkalmazásként sztochasztikusan folytonos folyamatok aszimptotikus viselkedését illetve közelitő folyamatoknak az eredetitől való eltéréslt vizsgáljuk meg.

Hasonlóan a determinisztikus részhez az időtől függő Ljapunov függvényekre csupán utalunk, minden eredmény szó szerint átvihető lesz.

2.1. A stabilitási alaplemma általánositása

Legyen $\{\beta_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ egy m-dimenziós sztochasztikusan folytonos jobbról folytonos vektorfolyamat az $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ valószinüségi mezőn.

Legyen $\mathcal{F}_t := \sigma(\{\beta_s\}_{s\leq t})$ egy monoton növekedő σ-algebra család.

Legyen $\tau_{F,s}$ egy $F\subset R^m$ zárt halmazból az $s\in R$ időpont utáni első kilépési idő.

Ekkor képezhető a $\beta_{t\wedge\tau_{F,s}}$ megállitott folyamat, amely $\mathcal{F}_{t\wedge\tau_{F,s}}$ mérhető. Jelöljük az $\mathcal{F}_{t\wedge\tau_{F,s}-t}$ $\mathcal{F}_t^{F,s}$ -vel.

Legyenek χ_F az $F\subset R^m$ halmaz, $\chi_{t,F}$ pedig a $\{\beta_t\in F\}$ halmaz karakterisztikus függvényei, azaz

$$\chi_F(x)=\begin{cases}1\,, & \text{ha} \quad x\in F\subset R^m\\ 0\,, & \text{ha} \quad x\notin F\subset R^m\end{cases} \qquad /2.1/$$

és

$$\chi_{t,F}=\chi_F(\beta_t). \qquad /2.2/$$

Tegyük fel, hogy megadható olyan kétszer folytonosan differenciálható $V: R^m\longrightarrow R^+$ függvény, amely teljesiti az alábbiakat:

Jelöljük $V_{F_s,t}$ -vel a

$$V_{F_s,t}(\omega):=V(\beta_{t\wedge\tau_{F,s}}) \qquad /2.3/$$

jobbról folytonos sztochasztikusan folytonos folyamatot.

1/ Minden véges $T\in R$ -re létezzék az $([0,T]\times\Omega,\ \mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{F},\ \lambda\times P)$ feletti L_2 normában és majdnem minden $\omega\in\Omega$ -ra pontonként a

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{E(V_{F_s,t+h}\,|\,\mathcal{F}_t^{F,s})-V_{F_s,t}}{h}=L_t^{F,s}V. \qquad /2.4/$$

2/ Tegyük fel, hogy az $L_t^{F,s}V$ felirható

$$\left(L_t^{F,s}V\right)(\omega)=\mu(t)\,\varphi(\beta_t(\omega))\cdot\chi_F+\mu(t)\left(\chi_{t,F}\cdot\varepsilon_t(\omega)+\varepsilon_t^{F,s}(\omega)\right) \qquad /2.5/$$

alakban.

Az /2.5/-ben szereplő valószinüségi változók illetve függvények teljesitsék az alábbiakat:

a/ $\varphi(\beta) \leq 0$ folytonos függvény, mely a $V(\beta)$ függvénynek monoton függvénye.

b/ $-\varphi(\beta) \to \infty$, $V(\beta) \to \infty$ ha $\|\beta\| \to \infty$.

c/ $F \subset R^m$ esetén az $\varepsilon_t^{F,s} = 0$.

d/ Legyen $E(\varepsilon_t^2)^{1/2} \leq C_1 \quad t \geq t_0$ és $E((\varepsilon_t^{F,s})^2)^{1/2} \to 0$ ha $t \to \infty$.

e/ $E(V(\beta_k)) < \infty$ minden $t \geq t_0$ esetén.

f/ $\mu(t) > 0$, $t \in R$ folytonos függvény.

<u>2.1.1 Megjegyzés:</u> A d/ pontból következik, hogy

$$\limsup_t E((\varepsilon_t + \varepsilon_t^{F,s})^2)^{1/2} \leq C \qquad /2.6/$$

és az is, hogy

$$E((\varepsilon_t + \varepsilon_t^{F,s})^2)^{1/2} \leq C_1 \, , \quad t \geq t_0 \qquad /2.7/$$

esetén. A dolgozatnak ebben a részében nem tesszük fel, hogy a megállitott folyamat létező differenciálja karakterisztikus függvényszorzóval kapható meg a $V(\beta_t)$ folyamat differenciáljából. Csupán a korrekciós tag nagyságára teszünk kikötést. A d/ feltételt az indokolja, hogy az ε_t tagot könnyebb meghatározni, mint az $\varepsilon_t^{F,s}$ korrekciót. Ha azonban ez utóbbi a d/ feltételt teljesiti, akkor az aszimptotikus viselkedésben csak az ε_t -nek lesz szerepe, és igy jobban használható eredményhez jutunk.

Jelen pont fő eredményeinek előkészitéseként belátunk egy fontos lemmát:

2.1.1 Lemma: Ha a β_t folyamat és V teljesitik az 1/ feltételt, akkor fennáll az

$$E(V_{F_S,t_2}|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s})-V_{F_S,t_1}=E\left(\int_{t_1}^{t_2}(L_\varrho^{F,s}V)\,d\varrho\,|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s}\right) \qquad /2.8/$$

egyenlőség.

Bizonyitás: Miután a /2.4/ limesz L_2 norma értelemben létezik, ezért ugyanilyen norma értelemben létezik az

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{E(V_{F_S,t+h}|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s})-E(V_{F_S,t}|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s})}{h}=E(L_t^{F,s}V|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s}) \qquad /2.9/$$

is, és igaz a /2.9/ egyenlőség is, mert a feltételes várható érték képzés folytonos az L_2 -normára nézve /négyzetes középben való konvergencia/.

Miután minden véges T -re továbbá az $L_t^{F,s}V$ integrálható a $([0,T]\times\Omega,\ \mathcal{B}(0,T)\times\mathcal{F},\ \lambda\times P)$ mértékre nézve, könnyen látható, hogy $L_t^{F,s}V$ integrálható lesz majdnem minden $\omega\in\Omega$ -ra a $([0,T]\times\Omega,\ \mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{F},\ \lambda\times P(\cdot\,|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s}))$ mértéktéren is, és ebből a Fubini tétel alkalmazásával kapjuk az /1.9/-ből az

$$E(V_{F_S,t_2}|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s})-V_{F_S,t_1}=\int_{t_1}^{t_2}E(L_\varrho^{F,s}V|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s})\,d\varrho=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}(L_\varrho^{F,s}V)\,P(d\omega|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s})\,d\varrho=\int_{\Omega}\left(\int_{t_1}^{t_2}(L_\varrho^{F,s}V)\,d\varrho\right)P(d\omega|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s})=$$

$$=E\left(\int_{t_1}^{t_2}(L_t^{F,s}V)\,dt\,|\mathcal{F}_{t_1}^{F,s}\right)$$

előállitást, ami már tételünket igazolja.

Ezután előkészitjük a módositott stabilitási alaplemmánkat:

Legyen

$$G_\ell := \{\beta \mid \varphi(\beta) < -(\ell+1)C_1\} \qquad /2.11/$$

és

$$F_\ell := R^m \setminus G_\ell . \qquad /2.12/$$

Legyen G_ℓ -ből az $s \in R$ utáni első kilépés $\tau_{F_\ell, s}$. Képezzük a

$$\hat{V}_t := V(\beta_{t \wedge \tau_{F_\ell, s}}) \qquad /2.13/$$

megállitott folyamatot.

<u>2.1.2 Alaplemma:</u> A /2.13/-mal megadott, 1/, 2/ és a/-f/-et teljesitő folyamatra teljesülnek az alábbi állitások:

1/ $$P\{\sup_{t \geq s} \hat{V}_t > \lambda\} \leq \frac{E(\hat{V}_s)}{\lambda} + \frac{1}{\ell^2} \qquad /2.14/$$

és

2/ $\int_s^\infty \gamma(t)\,dt = \infty$ esetén

$$P\{\beta_{t \wedge \tau_{F_\ell, s}} \not\to F_\ell\} \leq \frac{1}{\ell^2} \qquad /2.15/$$

<u>Bizonyitás:</u> Képezhetjük a $\{V(\beta) \leq \lambda\}$ nivóhalmazt, és a $\{\beta_t\}_{t \in R}$ folyamatnak e halmazból való s utáni $\tau_{\lambda, s}$

első kilépési idejét.

Legyen $t_1 > s$, könnyen látható, hogy

$$\{\sup_{t_1 \geq t \geq s} \hat{V}_t > \lambda\} = \{ \hat{V}_{t_1 \wedge \tau_{\lambda,s}} \geq \lambda\} \tag{2.16}$$

fennáll. /Bizonyitást elegendő a jobbról folytonosság miatt racionális t-kre elvégezni, és ilyen esetre a II. fejezet 1.1.1 alaplemma bizonyitásában látható, az /1.12/-nél./

Az is következik a jobbról folytonosságból, hogy

$$\hat{V}_{t \wedge \tau_{\lambda,s}} = V(\beta_{t \wedge \tau_{\lambda,s} \wedge \tau_{F_\ell,s}}), \tag{2.17}$$

és igy bevezethetjük a

$$\hat{V}_{t \wedge \tau_{\lambda,s}} =: V_t^\lambda \tag{2.18}$$

folyamatot, mely éppen a $\{V \leq \lambda\} \cap \{\varphi < -(\ell+1) C_1\} =: F_{\lambda,\ell}$ halmazból való kilépéssel megállitott folyamat.

Tegyük fel, hogy

$$P\{\beta_s \in F_{\lambda,\ell}\} \leq \frac{1}{\ell^2}, \tag{2.19}$$

és mivel érvényes a

$$P(\hat{V}_s > \lambda) \leq \frac{E(\hat{V}_s)}{\lambda} \tag{2.20}$$

becslés is, igy

$$P\{\beta_s \in F_\ell\} \geq 1 - \frac{E(\hat{V}_s)}{\lambda} - \frac{1}{\ell^2}. \tag{2.21}$$

Ha azonban ez nem teljesül, akkor a sztochasztikus folytonosság következtében van olyan $[s, t_1]$, $t_1 > s$ intervallum, hogy ott

$$P\{ \beta_t \in F_{\lambda,\ell} \, ; \; s \le t \le t_1 \} > \frac{1}{\ell^2} . \qquad /2.22/$$

Becsüljük meg ez esetben az

$$E(V^{\lambda}_{t_1} - \hat{V}_s) \ge - E(\hat{V}_s) \qquad /2.23/$$

várhatóértéket felülről:

$$E(V^{\lambda}_{t_1} - \hat{V}_s) = E\left(E(V^{\lambda}_t \mid \mathcal{F}_{\tau_{F_{\lambda,\ell}} \wedge s}) - \hat{V}_s \right) , \qquad /2.24/$$

és /2.17/, /2.18/ miatt a /2.8/ előállitást beirhatjuk a /2.24/ jobb oldalába, és /2.5/-tel az

$$E(V^{\lambda}_{t_1} - V_s) = E\left(E\left(\int_s^{t_1} \gamma(t) \varphi(\beta_t) \chi_{F_{\lambda,\ell}} + \gamma(t) (\chi_{t, F_{\lambda,\ell}} \cdot \varepsilon_t + \varepsilon_t^{F_{\lambda,\ell}, s}) dt \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_{F_{\lambda,\ell}}, s} \right) \right) =$$

$$= E\left(\int_s^{t_1} \gamma(t) \varphi(\beta_t) \chi_{F_{\lambda,\ell}} dt \right) + \int_s^{t_1} \gamma(t) \left(E(\chi_{t, F_{\lambda,\ell}} \cdot \varepsilon_t + \varepsilon_t^{F_{\lambda,\ell}, s}) \right) dt \le$$

$$\le - P(\beta_t \in F_{\lambda,\ell} \, ; \; s \le t \le t_1) \cdot c_1 \cdot \left(\int_s^{t_1} \gamma(t) dt \right) \cdot (\ell + 1)$$

$$+ \left(\int_s^{t_1} \gamma(t) dt \right) \cdot P(\beta_t \in F_{\lambda,\ell} \, ; \; s \le t \le t_1) \cdot \ell \cdot c_1 =$$

$$= - P(\beta_t \in F_{\lambda,\ell} \, ; \; s \le t \le t_1) \cdot c_1 \cdot \int_s^{t_1} \gamma(t) dt \le$$

$$\le - \frac{c_1}{\ell^2} \cdot \int_s^{t_1} \gamma(t) dt \qquad /2.25/$$

ahol az első azonos átalakitás után a $\varphi(\beta)$ integrálásánál a G_ℓ definicióját vettük tekintetbe, és a második tagra alkalmaztuk a /2.22/ alapján a II. fejezet 1.1.1 lemmáját. A második tag becslésekor még azt vettük számitásba, hogy a megállitás miatt $\varepsilon_t^{F_{\lambda,\ell},s}$ a $\{\beta_t \in F_{\lambda,\ell}\,;\ s \leq t \leq t_1\}$ halmazon kivül 0.

A /2.25/-ből következik, hogy

$$P\{\sup_{t_1 \geq t \geq s} \hat{V}_t > \lambda\} \leq \frac{E(V_t^\lambda)}{\lambda} \leq \frac{E(\hat{V}_s)}{\lambda} \qquad /2.26/$$

Legyen $t^* := \sup\limits_{t_1\text{-re ez fennáll}} t_1$. Ha t^* végtelen, akkor /1.26/ bizonyitja a tétel állitását.

Ha t^* véges, akkor, fennállnak a

$$P\{\sup_{t^* \geq t \geq s} \hat{V}_t > \lambda\} \leq \frac{E(\hat{V}_s)}{\lambda} \qquad /2.27/$$

és

$$P\{\beta_t \in F_{\lambda\ell}\,;\ s \leq t \leq t^*\} \leq \frac{1}{\ell^2} \qquad /2.28/$$

egyenlőtlenségek /különben a sztochasztikus folytonosság miatt t^* nem lenne supremum/.

Ez azonban azt jelenti, hogy a folyamat t^*-ig valószinüséggel megáll, igy

$$P\{\sup_{t \geq s} \hat{V}_t > \lambda\} \leq \frac{E(\hat{V}_s)}{\lambda} + \frac{1}{\ell^2} \qquad /2.29/$$

Ez a tétel első állitását bizonyitja, mig $\int\limits_s^\infty \varkappa(t)\,dt = \infty$ esetén /2.23/ és /2.25/ mutatják, hogy t^* szükségképpen véges, éspedig minden $\lambda > 0$ -ra. Ámde ez azt jelenti, hogy a 2/ állitás integrálfeltételének teljesülése esetén $1-\frac{1}{\ell^2}$ valószinüséggel a $\beta_{t\wedge\tau_{F_\ell,s}}$ folyamat megáll, ami a 2. állitást bizonyitja.

<u>2.1.1 Következmény:</u> Legyen $H \subset R^m$ kompakt halmaz, jelölje $\varrho(\beta, H)$ a β pontnak H-tól való távolságát.

1/ $\int_s^\infty \gamma(t)\,dt$ esetén a

$$P\{\sup_{t'>s}\inf_{t>t'}\varrho(\beta_t, F_\ell)=0\} \geq 1-\frac{1}{\ell^2} \qquad /2.30/$$

ahol $F_\ell = \{\varphi \geq -(\ell+1)C\}$

2/ Ha $\sup_{t\geq t'} E(\|\varepsilon_t\|^2)^{1/2} =: C_{t'} \to 0$, $t \to \infty$ esetén,

akkor

$$P\{\sup_{t'>s}\inf_{t>t'}\varrho(\beta_t, F_{-1})=0\} = 1. \qquad /2.31/$$

<u>Bizonyitás:</u> Szó szerint megegyezik a II. fejezet 1.1.1 következmény bizonyitásával. Az F_ℓ -ben C_1 -et C -re a /2.6/ miatt változtathatjuk.

Most rátérünk alaptételünk bizonyitásának előkészitésére.

<u>2.1.3 Lemma:</u> Tegyük fel, hogy valamely $t>s$ -től kezdve teljesül a

$$-\varrho\cdot E(\varphi(\beta_t)) \geq E(\varepsilon_t^+) \qquad /2.32/$$

feltétel valamilyen $0<\varrho<1$ mellett.

Ekkor az

$$\eta_s := \int_s^\infty \gamma(t)\cdot \varepsilon_t^+ \, d_t < \infty \quad m.m. \qquad /2.33/$$

és η várható értéke véges.

Bizonyitás: Irjuk fel az $E(V(\beta_t) -$ várható értéket a /2.8/ felhasználásával:

$$E(V(\beta_t) - V(\beta_s)) = E(E(V(\beta_t) - V(\beta_s) \mid \mathcal{F}_s)) =$$
$$= E(E(\int_s^t (\gamma(h)\varphi(\beta_h) + \gamma(h)\cdot \varepsilon(h))dh \mid \mathcal{F}_s)) =$$
$$= E(\int_s^t (\gamma(h)\varphi(\beta_h) + \gamma(h)\cdot \varepsilon(h))dh) =$$
$$= \int_s^t \gamma(h)(E(\varphi(\beta_h)) + E(\varepsilon_h^+) - E(\varepsilon_h^-))dh \leq$$
$$\leq (1-\varrho)\int_s^t \gamma(h)\, E(\varphi(\beta_h))dh \qquad /2.34/$$

ahol felhasználtuk az $E(E(f \mid \mathcal{G})) = E(f)$ azonosságot, az integrál és várható érték felcserélhetőségét, és végül a /2.32/ feltételt, és hogy negativ tag elhagyásával növelünk.

Ebből azonnal következik, az

$$E\left(V(\beta_t)-V(\beta_s)\right) \geq -E\left(V(\beta_s)\right) \qquad /2.35/$$

miatt, hogy

$$-\int_s^\infty \gamma(h)\cdot E(\varphi(\beta_h))\,dh \leq \frac{E(V(\beta_s))}{1-\varrho} \qquad /2.36/$$

igy /2.32/ miatt ugyanez áll fenn az

$$\int_s^\infty \gamma(t)\, E(\varepsilon_t^+)\,dt \qquad /2.37/$$

függvényre. Miután az $\int_s^t \gamma(h)\,\varepsilon_h^+$ monoton növekedő sorozat, igy pontonként konvergens, sőt véges intervallumokon integrálható is a valószinüségi mérték szerint, igy ez érvényes a Beppó Levi tétel értelmében a /2.37/-tel értelmezett függvényre is. Ez pedig a lemmát bizonyitja.

<u>2.1.1 alaptétel:</u> Tegyük fel, hogy a $\{\beta_t\}_{t\in R}$ és V-vel definiált $V(\beta_t)$ folyamat az 1/, 2/ és a/-f/ feltételek mellett teljesiti az

1/ $\int_s^\infty \gamma(t) = \infty$;

2/ $0<\varrho<1$ -re a

$$-\varrho\cdot E(\varphi(\beta_t)) \geq E(\varepsilon_t^+) \quad , \quad t \geq s \qquad /2.38/$$

feltételeket.

Ekkor

A/ $E(|\varepsilon_t|^2)^{1/2} \leq C$ esetén

$$P\{\lim_{t\to\infty} \varrho(\beta_t, F_\ell)=0\} \geq 1-\frac{1}{\ell^2}$$ /2.39/

ahol $F_\ell = \{\varphi \geq -(\ell+1)c\}$.

B/ $E(|\varepsilon_t|^2)^{1/2} \to 0$ esetén pedig

$$P\{\lim_{t\to\infty} \varrho(\beta_t, \{\varphi=0\})=0\}=1$$ /2.40/

teljesül.

Bizonyitás: Képezzük a

$$W_t(\omega)= V(\beta_t(\omega)) + \int_t^\infty \gamma(h)\cdot\varepsilon_h^+(\omega)\,dh$$ /2.41/

valószinüségi változót, amely képezhető a 2.1.3 lemma miatt.

Ha

$$\eta_t := \int_t^\infty \gamma(h)\cdot\varepsilon_h^+(\omega)\,dh$$ /2.42/

akkor η_t minden t-re $\mathcal{F}_t$ mérhető, és igy

$$L_t W_t \leq 0,$$ /2.43/

ugyanis

$$L_t \eta_t = -\gamma(t)\cdot\varepsilon_t^+.$$ /2.44/

Ámde akkor W_t pozitiv szupermartingál mely konvergens, az $\eta_t \to 0,\ t\to\infty$ és igy $V(\beta_t)$ is konvergens. Miután φ a V monoton függvénye, ezért $\varphi(\beta_t)$ is konvergens.

Az első esetben érvényben van /2.30/, vagyis a φ F_ℓ nivóhalmazában van a távolság alsó limesze. Másoldalról azonban a $\varphi(\beta_t)$ konvergál, és $-\varphi(\beta)\to\infty$, $\|\beta\|\to\infty$ igy nivóhalmazai kompakt halmazok. De akkor a /2.30/-ban szereplő távolságnak a felső limesze is 0-hoz tart, és igy a limesz létezik $1-\frac{1}{\ell^2}$ valószinüséggel. Hasonló okoskodással nyerjük tételünk B/ állitását is.

<u>2.1.2 Megjegyzés:</u> Monoton fogyó σ-algebra család esetében tételeink szó szerint igy bizonyithatóak, és igazak.

<u>2.1.3 Megjegyzés:</u> Ha a $\{\beta_t\}_{t\in R}$ folyamathoz egy $\{V_t\}_{t\in R}$ függvénycsaládot találunk, mely teljesiti 1/-2/ ill. a/-f/-et akkor a két tétel szó szerint igaz, ha feltesszük, hogy a $\varphi=\Psi_t\circ V_t$ -ben szereplő Ψ_t függvények minden kompakt halmazon ekvifolytonosak, és egyenletesen korlátosak.

<u>2.2 Sztochasztikus differenciálegyenletek aszimptotikus viselkedése</u>

Ebben a pontban a sztochasztikus differenciálegyenletek aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk. Ezek a folyamatok, mint tudjuk, egy Wiener-folyamat szerinti integrált tartalmaznak, és igy speciális növekményü folyamatok. A diszkrét rendszereknél azt láttuk, hogy elég tág folyamatosztály kezelhető a stabilitási tételünkkel. Először megmutatjuk, hogy a most szóbanforgó folyamatosztály tényleg elég bő.

Legyen ξ_t egy folytonos trajektoriájú n-dimenziós folyamat, melyre az

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{E(\xi_{t+h}|\mathcal{F}_t)-\xi_t}{h}=\alpha(t,\omega) \qquad /2.46/$$

határérték létezik pontonként majdnem mindig, és pedig a /2.4/-nél megkövetelt négyzetes közép-norma értelemben. /Legyen $\mathcal{F}_t := \sigma\{\{\xi_s\}_{s\le t}\}$ //.

Képezhetjük az

$$\eta_t = \xi_t - \int_0^t \alpha(s,\omega)\, ds \qquad /2.47/$$

különbségfolyamatot. Ez 0 várható értékü négyzetesen integrálható, és martingál, azaz $t' > t$ esetén

$$E(\eta_{t'}|\mathcal{F}_t) - \eta_t = E(\xi_{t'}|\mathcal{F}_t) - \xi_t - E\left(\int_0^t \alpha(s,\omega)ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right) = 0 \qquad /2.48/$$

/ld. a 2.1.1 lemmát/.

Ámde akkor az η_t négyzetesen integrálható martingálhoz megadható olyan W_t Wiener folyamat, és $a(t,\omega)$ minden $t \in R$ -re $\mathcal{F}_t$ -mérhető, minden $T>0$ mellett az $\Omega \times [0,T]$ -n a $P \times \lambda$ -ra négyzetesen integrálható valószinüségi vektorfolyamat, hogy

$$\eta_t = \eta(0) + \int_0^t a(t,\omega)\, dW_s \qquad /2.48/$$

/ld. [7] , 5.12 tétel/.

Ez azt jelenti, hogy az Ito differenciálegyenletre való korlátozódás nem jelenti az általánosság túlzott csökkentését.

Legyen ezért folyamatunk sztochasztikus differenciálegyenlete

$$dx_t = a(t,x_t)\, dt + b(t,x_t)\, dW_t \qquad /2.49/$$

ahol $a: R^{n+1} \to R^n$, $b: R^{n+1} \to R^{n^2}$, t rögzitése mellett globális Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő függvények, melyek ráadásul $\|a(t,x)\|^2 + \|b(t,x)\|^2 \leq L(1+\|x\|^2)$ feltételnek eleget tesznek, és mint n+1 változós függvények Borel mérhetőek, a W_t folyamat pedig egy n-dimenziós Wiener folyamat. Mint ez a függelék 7. pontjából kiderül, a /2.44/-nek tetszőleges η n-dimenziós négyzetesen integrálható valószinüségi vektorváltozóra mint $X(0) = \eta$ kezdetiértékfeladatra létezik lokális, erős értelemben vett megoldása. Tegyük fel, hogy a /2.49/-nek létezik a $[0, \infty)$ intervallumon erős megoldása minden négyzetesen integrálható kezdetiértékfeladatra.

Vezessük be a b mátrixból képzett

$$\sigma(t,x) = b' \cdot b \tag{2.50}$$

mátrixot, ahol b' a b mátrix transzponáltját jelöli. Ha már most a $V: R^n \to R^+$ függvény kétszer folytonosan differenciálható, akkor a $V(x_t)$ folyamatra a /2.4/ határérték

$$L_t V(x_t) = \frac{\partial V(x_t)}{\partial x} \cdot a(t,x_t) + \frac{1}{2} \, sp \left(\frac{\partial^2 V(x_t)}{\partial x^2} \cdot \sigma(t,x_t) \right) \tag{2.51}$$

alakban irható fel, és megjegyezzük, hogy Ito és Poisson folyamatokra az $\varepsilon^{F,s} = 0$ /$\varepsilon^{F,s}$-t ld. /2.6/-nál, mig a /2.51/-hez ld. a függelék 4. és 8. -t/.

Időtől függő V esetében /2.51/-hez még hozzájön egy $\frac{\partial}{\partial t}$ tag is, azaz

$$L_t V(x_t) = \frac{\partial V(t,x_t)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x_t)}{\partial x} \cdot a(t,x_t) + \frac{1}{2} \, sp \left(\frac{\partial^2 V(t,x_t)}{\partial x^2} \cdot \sigma(t,x_t) \right) \tag{2.52}$$

Tegyük fel, hogy

$$L_t V(t,x_t) \leq \gamma(t)\cdot\varphi(x_t) + \gamma(t)\cdot \varepsilon_t(x_t) \qquad /2.53/$$

úgy, hogy

1/ $\gamma(t) > 0$ folytonos függvény;

2/ $\varphi(x) \leq 0$ és $-\varphi(x) \to \infty$ ha $\|x\| \to \infty$, $V(t,x) \to \infty$ ha $\|x\| \to \infty$ minden $t \in R$ mellett.

3/ $\varphi(x) = \psi(t, V(t,x))$ előállitás érvényes, ahol $\psi(t,\cdot)$ t rögzitése mellett monoton függvény, $t \in R^+$ -ra, és a $\{\psi(t,\cdot)\}_{t \geq t_0}$ függvényhalmaz minden kompakt halmazon ekvifolytonos, és t-ben pontonként konvergens.

4/ $V(t,x) \to \infty$ ha $\|x\| \to \infty$.

Két feltételtipust vezetünk be:

F1/ $E(\varepsilon_t^2)^{1/2} \leq C$ minden $t \geq t_0$ vagy

F2/ $E(\varepsilon_t^2)^{1/2} \to 0$, $t \to \infty$ esetén.

G/ $0 < \varrho < 1$ mellett teljesül a

$$-\varrho \cdot E(\varphi(x_t)) \geq E(\varepsilon_t^+) \qquad /2.54/$$

Az alábbi tétel érvényes:

<u>2.2.1 Tétel:</u> Ha $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t)dt = \infty$, akkor

1/ Az F1/ feltétel teljesülése esetén

$$P\{\liminf_{t\to\infty} \varrho(x_t; \{\varphi \geq -(\ell+1)C\}) = 0\} \geq 1 - \frac{1}{\ell^2} \qquad /2.55/$$

2/ Az F2/ teljesülése esetén

$$P\{\liminf_{t\to\infty} \varrho(x_t; \{\varphi=0\})=0\} = 1$$ /2.56/

3/ Ha F1/ mellett $G/$ is teljesül, akkor

$$P\{\lim_{t\to\infty} \varrho(x_t; \{\varphi \geq -(\ell+1)c\})=0\} \geq 1-\frac{1}{\ell^2}$$ /2.57/

4/ Ha pedig F2/ mellett teljesül $G/$ akkor

$$P\{\lim_{t\to\infty} \varrho(x_t; \{\varphi=0\})=0\} = 1$$ /2.58/

Bizonyitás: Ez közvetlenül következik a 2.1.2 alaplemmából, 2.1.1 alaptételből, és a 2.1.1 következményből.

A /2.49/ folyamattal kapcsolatban a gyakorlat szemszögévől fontos kérdés az, hogy ha a

$$\dot{x}_t = a(t, x_t)$$ /2.59/

közönséges differenciálegyenlet globálisan aszimptotikusan stabil egy $H \subset R^n$ kompakt halmazzal mint vonzási tartománnyal, akkor a /2.49/- el megadott zajos folyamat milyen b zajmátrixszal marad stabil, vagy legalábbis mikor tart $t\to\infty$ -re, H egy környezetébe?

Tegyük fel, hogy a /2.59/ egyenlethez megadható egy $V: R^{n+1} \to R^+$ Ljapunov függvény, hogy

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \cdot a(t,x) \leq \mu(t) \cdot \varphi(x), \quad t \geq t_0,$$ /2.60/

ahol a μ, φ és V teljesitik az e pontbeli 1/,2/,3/ és 4/

feltételeket.

Megadunk két feltételtipust:

A1/ $\frac{1}{\gamma(t)} E\left(\left(sp\left(\frac{\partial^2 V(t,x_t)}{\partial x^2} \cdot \sigma(t,x_t)\right)\right)^2\right)^{1/2} \leq C, \quad t \geq 0$ vagy

A2/ $\frac{1}{\gamma(t)} E\left(\left(sp\left(\frac{\partial^2 V(t,x_t)}{\partial x^2} \cdot \sigma(t,x_t)\right)\right)^2\right)^{1/2} \to 0, \quad t \to \infty$

és

B/ Létezik olyan $0 < \varrho < 1$, hogy

$$-\varrho \cdot E\left(\frac{\partial V(t,x_t)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x_t)}{\partial x} a(t,x_t)\right) \geq \frac{1}{2\cdot\gamma(t)} E\left(\left(sp\left\{ \frac{\partial^2 V(t,x_t)}{\partial x^2} \cdot \sigma(t,x_t)\right\}\right)^+\right) \qquad /2.61/$$

<u>2.2.2 Tétel:</u> Az $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t)\,dt = \infty$ mellett

1/ A1/ teljesülése esetén /2.55/ igaz ;

2/ A2/ teljesüléséből /2.56/ következik;

3/ A1/ és B/ teljesüléséből /2.57/ következik;

4/ A2/ és B/ teljesülése /2.58/-at eredményezi.

<u>2.2.1 Megjegyzés:</u> Tehát a /2.59/ rendszert "elég kis" zajjal torzitva a stabilitás nem romlik el.

A stabilitás vizsgálatánál mindig nehéz kérdés a Ljapunov függvények megadása. Az alábbi tétel a determinisztikus rendszerekre vonatkozó olyan tipusú tétel analógja, hogy ha egy determinisztikus rendszernek van globálisan aszimptotikusan stabil linearizálása, akkor ez a rendszer stabil.

Legyenek az $x_t, y_t, t \in R$ folyamatok a

$$dx_t = a_1(t,x_t)\,dt + b_1(t,x_t)\,dw_t \qquad /2.62/$$

és

$$dy_t = a_2(t,y_t)\,dt + b_2(t,y_t)\,dw_t \qquad /2.63/$$

sztochasztikus differenciálegyenletek megoldásai, ahol a_i, b_i, $i=1,2$ mellett teljesitik a /2.49/ egyenletnél kirótt feltételeket.

Tételezzük fel, hogy a /2.62/ egyenlethez megadható olyan V Ljapunov függvény, mely teljesiti a 2.2.1 tétel feltételeit, és emellett az $(L_t V)(t,x): R^{n+1} \to R$ leképezés a /2.62/ és /2.63/ egyenletek megoldásainak terén négyzetes - közép normában t-ben egyenletesen folytonos.

<u>2.2.2 Megjegyzés:</u> Ennek elegendő feltétele, hogy a /2.62/ ill. /2.63/ $a_i, b_i, i=1,2$ vektor ill. mátrix függvényeire az

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\|a_i(t,x)-a_i(t,y)\|^2+sp\left[(b_i(t,x)-b_i(t,y))'\cdot(b_i(t,x)-b_i(t,y))\right]\right\}\leq\|x-y\|\cdot L \qquad /2.64/$$

feltétel és a $\frac{\partial V(t,x)}{\partial(t,x)}$ vektorra is a

$$\left\|\frac{d V(t,x)}{d(t,x)}-\frac{d V(t,y)}{d(t,y)}\right\|^2+\left|sp\left(\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y^2}\right)\right|\leq L\cdot\|x-y\| \qquad /2.65/$$

egyenlőtlenség teljesül.

Bevezetünk ezután két feltételtipust:

K1/ $E(\|x_t-y_t\|^2)^{1/2}\leq C_1$ vagy

K2/ $E(\|x_t-y_t\|^2)^{1/2}\longrightarrow 0$ $t\to\infty$;

és

G1/ Megadható olyan $r>0$ pozitiv szám, hogy

$$-r\cdot E(\varphi(x_t))\geq E\left(\left(L_t V(y_t)-L_t V(x_t)\right)^+\right) \qquad /2.66/$$

teljesül minden $t\geq t_0$ esetén.

2.2.3 Tétel:

1/ Ha a /2.62/ folyamat teljesiti a 2.2.1 tétel 1/ vagy 2/ állításának feltételeit, és K1/ teljesül, akkor

$$P\{\liminf_{t\to\infty} \varrho\{y_t; \{\varphi \geq -(\ell+1)(C+L\cdot C_1)\}\}=0\} \geq 1-\frac{1}{\ell^2}. \qquad /2.67/$$

2/ Ha teljesülnek a 2.2.1 tétel 2/ állításának feltételei a /2.62/ folyamatra, és a K2/ feltétel, akkor

$$P\{\liminf_{t\to\infty} \varrho(y_t; \{\varphi=0\})=0\} = 1. \qquad /2.68/$$

3/ Ha a 2.2.1 tétel 3/ állításának feltételei teljesülnek a /2.62/ folyamatra a K1 és a G/ feltételekkel együtt, akkor

$$P\{\lim_{t\to\infty} \varrho(y_t; \{\varphi \geq -(\ell+1)(C+L\cdot C_1)\})=0\} \geq 1-\frac{1}{\ell^2}. \qquad /2.69/$$

4/ Ha a 2.2.1 tétel 4/ állításának feltételei teljesülnek a /2.62/ folyamatra és emellett a K2/ és G/feltételpár is, akkor

$$P\{\lim_{t\to\infty} \varrho(y_t; \{\varphi=0\})=0\} = 1. \qquad /2.70/$$

Bizonyitás: Szinte teljes egészében az előzőek következménye, egy nyilvánvaló becslés után.

2.2.3 Megjegyzés: Az 1/ ill. 3/-ban szereplő L általában függ a C_1 -től. A /2.64/ ill /2.65/ teljesülése esetén azonban kifejezhető az ott szereplő L-el, tehát független a C_1-től.

2.2.4 Megjegyzés: Az utóbbi tételekhez becsülni kell az x_t és y_t folyamatok négyzetes középbeli eltérését. Ez azonban a pontonkénti konvergenciánál könnyebb. Egy elegendő feltétel a korlátosságra ill. az esetleges 0-hoz tartásra a

$$L_t(\|x_t-y_t\|^2) = 2\,(x_t-y_t,\ a_1(t,x_t)-a_2(t,y_t)) + sp\big((b_1(t,x_t)-b_2(t,y_t))'(b_1(t,x_t)-b_2(t,y_t))\big) \leq \leq 0 \qquad /2.71/$$

differenciál-egyenlőtlenség teljesülése.

2.3. Közelitő differenciálegyenletek

E pontban azt a gyakorlatban fontos kérdést vizsgáljuk meg, hogy ha a /2.62/ differenciálegyenlet megoldásai nem stabilak abban az értelemben, hogy $t \to \infty$ -re a trajektóriák nem konvergálnak, milyen feltételek mellett tartanak az $x_t - y_t$ trajektóriák /ahol y_t a /2.63/ megoldása/ egy kompakt halmazba, vagy legalábbis a megoldások eltérése mikor lesz korlátos.

Legyenek a /2.62/ egyenletek az x_t, z_t megoldásai. Képezzük a

$$d(x_t - z_t) = (a_1(t,x_t) - a_1(t,z_t))dt + (b_1(t,x_t) - b_1(t,z_t))dw_t =$$

$$= \hat{a}_1(t, x_t - z_t, z_t)dt + \hat{b}_1(t, x_t - z_t, z_t)dw_t \qquad /2.72/$$

Ito differenciálegyenletet.

Ennek az egyenletnek létezik egyértelmü erős értelemben vett megoldása.

Tételezzük fel, hogy megadható /2.72/-höz egy $V: R^{n+1} \to R^+$ kétszer folytonosan differenciálható Ljapunov függvény úgy, hogy erre teljesülnek a 2.2.1 tétel feltételei.

Képezzük a

$$d(y_t - z_t) = (a_2(t,y_t) - a_1(t,z_t))dt + (b_2(t,y_t) - b_1(t,z_t))dw_t =$$

$$= \hat{a}_2(t, y_t - z_t, z_t)dt + \hat{b}_2(t, y_t - z_t, z_t)dw_t \qquad /2.73/$$

egyenletet.

Tételezzük fel, hogy a /2.72/-höz létező V Ljapunov függvény olyan, hogy az L_tV a /2.72/ ill. /2.73/ megoldásainak halmazán négyzetes közép-norma értelemben t-ben egyenletesen folytonos.

Ekkor az alábbi tételt láthatjuk be:

A bevezetett jelolésekkel, és feltételekkel beláthatjuk a /2.62/ ill. /2.63/ egyenletekre vonatkozó alábbi tételt:

2.3.1 Tétel:

1/ Tegyük fel, hogy a /2.72/-re teljesülnek a 2.2.1 tétel 1/ vagy 2/ állitásának feltételei és a K1/ feltétel. Akkor

$$P\{\liminf_{t\to\infty} \varrho(x_t-y_t;\{\varphi\geq-(\ell+1)(C+L\cdot C_1)\})=0\}\geq 1-\frac{1}{\ell^2}. \qquad /2.74/$$

2/ Ha /2.72/-re a 2.2.1 tétel 2/ állitásának feltételei teljesülnek, és K2/, akkor

$$P\{\liminf_{t\to\infty} \varrho(x_t-y_t;\{\varphi=0\})=0\}=1. \qquad /2.75/$$

3/ Ha /2.72/-re a 2.2.1 tétel 3/ állitásának feltételei érvényesek, és K1/ és G/ is fennállnak, akkor

$$P\{\lim_{t\to\infty} \varrho(x_t-y_t;\{\varphi\geq-(\ell+1)(C+L\cdot C_1)\}=0\}\geq 1-\frac{1}{\ell^2}. \qquad /2.76/$$

4/ Ha /2.72/-re a 2.2.1 tétel 4/ állitásának feltételei igazak, és K2/ teljesül G/-vel együtt, akkor

$$P\{\lim_{t\to\infty} \varrho(x_t-y_t;\{\varphi=0\})=0\}=1. \qquad /2.77/$$

Bizonyitás: teljes egészében következik a 2.2.3 tételből.

FÜGGELÉK

1. MARKOV FOLYAMATOK

Kiindulásként vizsgáljuk meg a müszaki irodalomban gyakran előforduló folyamattipust:

T-vel ill. R-rel jelöljük a nem negativ egészek illetve a valós számok halmazát.

Legyenek $\{\xi(k)\}_{k\in T}$ ill. $\{\alpha(k)\}_{k\in T}$ valószinüségi változók sorozatai egy $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ valószinüségi mező felett.

Tegyük fel, hogy az alábbiak teljesülnek e sorozatokra:

1/ α_k független az α_ℓ -től és $\xi(j)$ -től $\ell<k$ és $j \le k, \ell, j\in T$ esetén minden $k\in T$ -re.

2/ Megadható egy $T\times R\times R \to R$ alkalmas rögzitett Borel mérhető függvény /minden folytonos függvény ilyen/, melyre fennáll a

$$\xi_{k+1} = f(k, \xi_k, \alpha_k), \quad k=0,1,2,\ldots \qquad /1/$$

összefüggés.

Megjegyezzük, hogy az igen széles körben elterjedt és ismert

$$\xi_{k+1} = a\cdot \xi_k + \alpha_k, \quad k=0,1,2,\ldots \qquad /2/$$

alakú autoregressziós folyamatok láthatóan teljesitik feltételeinket.

Az /1/ összefüggés ismételt alkalmazásával $t>t', t,t'\in T$ mellett a

$$\xi(t) = g_{t',t}(\xi_{t'}, \alpha_{t'}, \alpha_{t'+1}, \ldots, \alpha_{t-1}) \qquad /3/$$

előállitást kapjuk, ahol g az f-ből véges számú helyettesitéssel egyértelmüen megkapható.

Nézzük meg most a (3) -ban szereplő folyamatokhoz tartozó valószinüségi mértékeket.

Jelöljük $\sigma(\alpha_{t',t-1})$ -el illetve $\sigma(\xi_{t'})$ -vel az $\alpha_{t'},\dots,\alpha_{t-1}$ illetve $\xi_{t'}$ valószinüségi változók által generált legszükebb σ -algebrát /azaz pl. $\sigma(\xi_{t'})$ azon $\mathcal{S}$ -beli események halmaza, amelyeket a $\xi_{t'}$ valószinüségi változó nivóhalmazaival azonositani, jellemezni tudunk/.

A P valószinüségi mérték megszoritását a $\sigma(\alpha_{t',t-1})$ -re $P_{\alpha_{t',t-1}}$ -el, a $\sigma(\xi_{t'})$ -re pedig $P_{\xi_{t'}}$ -vel jelöljük.

A bevezetett jelölések segitségével az 1/ függetlenségi feltevést az alábbi formában irhatjuk fel:

Ha $A\in\sigma(\xi_{t'})$, $B\in\sigma(\alpha_{t',t-1})$ akkor

$$P(A\cap B) = P_{\xi_{t'}}(A)\cdot P_{\alpha_{t',t-1}}(B). \qquad /4/$$

Megjegyezzük, hogy a /3/-ban szereplő $\xi(t)$ valószinüségi változó épp ilyen $A\cap B$ alakú események által generált legszükebb σ -eseményalgebrára nézve mérhető /azaz $\xi(t)$ nivóhalmazai ilyen halmazok egyesitései és metszetei segitségével állithatók elő/.

A /4/-ből azonnal következik, hogy a $P_{\xi_t}(\cdot\mid\xi_{t'}=y)$ feltételes valószinüségi mértéket a

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P_{\xi_t}(A\cap B)}{P_{\xi_{t'}}(A)} = P_{\alpha_{t',t-1}}(B) \qquad /5/$$

mérték generálja, amely láthatóan nem függ a $\xi_{t'}=y$ -tól.

Térjünk most át az /1/-el definiált folyamat u.n. átmeneti valószinüségeinek vizsgálatára. Az átmeneti valószinüség arra a kérdésre ad választ, hogy ha a $\xi(t')=y$ egy rögzitett érték, akkor e feltétel mellett milyen valószinüséggel esik a $\xi(t)$ valószinüségi változó értéke egy adott $H \subset R$ Borel halmazba /azaz pl. egy $H \subset R$ intervallumba/.

A választ a $\chi_H(\xi(t))$ valószinüségi változó $E(\chi_H(\xi(t))/\xi(t')=y)$ feltételes várható értéke adja meg, ahol a χ_H függvény a H halmaz u.n. karakterisztikus függvénye, amit a

$$\chi_H(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \in H \\ 0 & , \text{ ha } x \in R \setminus H \end{cases} \qquad /6/$$

utasitás ad meg.

Ha az átmeneti valószinüséget $P(t', y, t, H$ -val jelöljük, ezt épp az /5/-ben kiszámitott feltételes valószinüségi mérték és a $\xi(t)$ ennek megfelelő /3/ előállitása segitségével számithatjuk ki:

$$P(t', y; t, H) = \int_\Omega \chi_H(\xi(t))\, P_{\xi_t}(d\xi_t \mid \xi_{t'}=y) = \int_\Omega \chi_H(g_{t't}(\xi(t'), \alpha_{t',t-1}))\, dP_{\xi_t}(\mid y) =$$

$$= \int_H \chi_H(g_{t't}(y, \alpha_{t',t-1}))\, dP_{\alpha_{t',t-1}} \,. \qquad /7/$$

Látható, hogy az átmeneti valószinüség a $\chi_H(g_{t't}(y, \alpha_{t',t-1}))$ valószinüségi változó feltétel nélküli várható értéke lesz, mert az /5/-ben kiszámitott feltételes mérték nem függ a feltételtől /azaz y-tól/.

Megmutatjuk most, hogy az /1/-el definiált dinamikus rendszer átmeneti valószinüségei is eleget tesznek a dinamikus rendszerek legalapvetőbb tranzitivitási sajátosságának, ami azt jelenti, hogy ha $t < s < v, t, s, v \in T$ akkor a $t \to s$ és $s \to v$ átmenetek törvényszerüségének kompoziciója megadja a $t \to v$ átmenet törvényszerüségét.

Ha tehát $t, s, v \in T$ teljesitik a fenti feltételeket, és a $H \subset R$ Borel halmazra vonatkozóan ki akarjuk számitani a $P(t, y; v, H)$ átmeneti valószinüséget, ezt megtehetjük a /3/ előállitás alapján a

$$\chi_H(\xi(t)) = \chi_H(g_{s,v}(\xi_s, \alpha_{s,v-1})) \qquad /8/$$

segitségével. Ehhez azonban meg kell határoznunk a $P_{\xi(v)}(\cdot \mid \xi(t)=y)$ feltételes valószinüségi mértéket a /8/ argumentumában szereplő $(\xi(s), \alpha_s, \dots \alpha_{v-1})$ vektor valószinüségi változó koordinátáival kifejezve. Ez az /1/ függetlenség felhasználásával épp

$$P(t, y; s, d\xi(s)) \cdot P_{\alpha_{s,v-1}}(d\alpha_{s,v-1}) \qquad /9/$$

lesz.

A /7/ várható értéket ezután a Fubini tétel segitségével kiszámithatjuk az alábbi felbontásban:

$$\begin{aligned} P(t, y; v, H) &= \int_{\Omega} \chi_H(g_{s,v}(\xi(s), \alpha_{s,v-1})) \, d P_{\xi(v)}(\cdot \mid \xi(t)=y) = \\ &= \int_{R^{v-s+1}} \chi_H(g_{s,v}(\xi(s), \alpha_{s,v-1})) \, P(t, y; s, d\xi) \cdot P_{\alpha_{s,v-1}}(d\alpha_{s,v-1}) = \\ &= \int_R \left(\int_{R^{v-s}} \chi_H(g_{s,v}(z, \alpha_{s,v-1})) \, dP_{\alpha_{s,v-1}} \right) P(t, y; s, dz) \end{aligned} \qquad /10/$$

A belső integrálás rögzitett $z \in R$ mellett a /7/ figyelembevételével az

$$\int_R P(s, z; v, H) \, P(t, y; s, dz) = P(t, y; v, H) \qquad /11/$$

összefüggést eredményezi, ami mutatja, hogy az átmeneti valószinüségek tényleg teljesen jellemzik az átmenet törvényszerüségeit.

<u>1.1 Megjegyzés:</u> Ha az /5/ feltételes valószinüségi mérték kiszámitásánál feltételként a $\{\xi(s)\}_{s\leq t, s\in T}$ valószinüségi változók családja szerepelt volna, az 1/ függetlenségi feltevés alapján feltételes valószinüségi mértékként változatlanul az /5/-ben foglalt eredményre jutunk. Igy az átmeneti valószinüségekre az alábbi többletet kaphatjuk:

Jelöljük $\mathcal{F}_t^{\xi}$ -vel a $\{\xi_s\}_{s\leq t, s\in T}$ valószinüségi változók által generált legszükebb σ -algebrát, legyen továbbá $H\subset R$ egy Borel halmaz, és $u>t$. Ekkor a

$$P(\xi(u)\in H \mid \mathcal{F}_t^{\xi}) = P(t, \xi(t); u, H)$$

eredményre jutunk, amit másképp úgy fogalmazhatunk, hogy tetszőleges $\xi(0) = y_0, \xi(1)=y_1, \dots, \xi(t)=y_t$ feltétel mellett annak a valószinüsége, hogy $\xi(u)\in H$ csak az y_t -től függ:

$$P(\xi(u)\in H \mid (y_0, y_1, \dots, y_t)) = P(t, y_t; u, H) \qquad /12/$$

A valószinüségi folyamatoknak azt az osztályát, amelyeket átmeneti valószinüségeik a fent irottak szerint jellemeznek, Markov folyamatoknak nevezzük.

<u>1.1 Definició:</u> A $P:\ R^+\times R^4\times R^+\times \mathcal{B}(R^4)\longrightarrow [0,1]$ leképezést általános értelemben vett Markov folyamatnak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1/ Tetszőleges $t, s\in R^+, s\leq t$, és $B\in\mathcal{B}(R^4)$ Borel halmaz rögzitése mellett a $P(t, z; s, B)$ mint $z\in R^4$ függvényre mérhető.

2/ Tetszőleges $t, s \in R^+, s \geq t$ és $z \in R^n$ mellett a $P(t, z; s, B)$ mint $B \in \mathcal{B}(R^n)$ Borel halmazokon értelmezett függvény valószinüségi mérték.

3/ A leképezésre teljesül a Chapmen-Kolmogorov egyenlet: $t < s < u$, $z \in R^n$ és $B \in \mathcal{B}(R^n)$ mellett

$$P(t, z; u, B) = \int_{R^n} P(s, y; u, B)\, P(t, z; s, dy) \qquad /13/$$

<u>1.2 Megjegyzés:</u> Nyilvánvaló, hogy az 1.1 definicióval valójában egy folyamatosztályt határoztunk meg csupán, melynek egyes elemeit a $t=0$ -beli kezdeti eloszlás megadásával határozhatjuk meg. Ez természetesen teljes összhangban van a bevezetőben szereplő /1/-el megadott folyamattal, amely az f megadása után kezdeti feltétel erejéig egyértelmü csupán.

<u>1.3 Megjegyzés:</u> Ha egy ξ_t, $t \in R^+$ folyamatra tetszőleges $t' > t$; $t, t' \in R^+$ esetén a

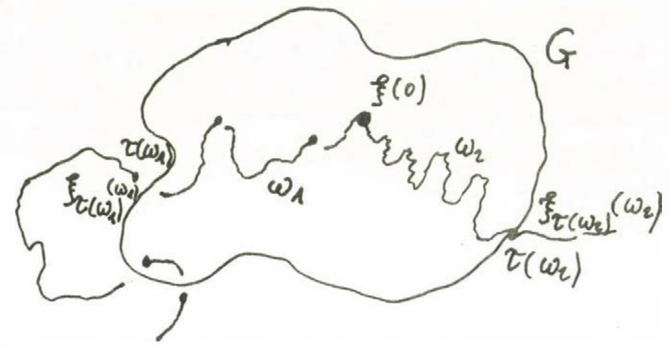
$$\xi_{t'} = f(t, \xi_t, \alpha_{t,t'}) \qquad /14/$$

összefüggés érvényes, és az $\alpha_{t,t'}$ valószinüségi változó független a ξ_t -től, akkor a $\{\xi_t\}_{t \in R^+}$ folyamat Markov folyamat lesz. Az $f: R^+ \times R^n \times R \to R^n$ adott Borel mérhető függvény.

A továbbiakban e pont jelölései érvényben maradnak, a $\{\xi_t\}_{t \in R^+}$ mindig n-dimenziós folyamatot fog jelölni.

2. MEGÁLLITOTT MARKOV FOLYAMAT, MARKOV PONT

Mint ezt a bevezetőben láttuk, stabilitási vizsgálatoknál alapvető kérdés az, hogy ha egy $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ folyamat a $t=0$ időpontban egy adott G nyilt halmazban van, akkor innét mikor és hol lép ki.



Esetünkben a $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ folyamat Markov folyamat, ezért a kilépés helye és időpontja is az Ω -beli elemi események függvénye. Pontosan fogalmazva minden rögzitett $\omega\in\Omega$ elemi eseményen a $\xi_t(\omega)$ realizációhoz tartozik egy $\tau(\omega)$ kilépési időpont, melyre a $\xi_t(\omega)\in G$ ha $0\leq t<\tau(\omega)$ és tetszőleges $\delta>0$ -ra van olyan $s\in[\tau(\omega),\tau(\omega)+\delta]$, hogy a $\xi_s(\omega)\notin G$ feltételek teljesülnek. A $\xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ pontot célszerü az ω -hoz tartozó kilépési pontnak tekinteni.

Ahhoz, hogy adott feltétel melletti kilépés eseményének bekövetkezési valószinüségét az $\{\Omega, \mathcal{S}, P\}$ valószinüségi mezővel felépitett modellben kiszámithassuk, az szükséges, hogy a szóbanforgó esemény az $\mathcal{S}$ -ben benne legyen /ugyanis e modellben csak $\mathcal{S}$ -beli események valószinüségéről beszélhetünk/. Formulákra áttérve, ha $t_1<t_2$, $t_1,t_2\in R^+$ és $B\in\mathcal{B}(R^n)$ egy Borel halmaz /pl. n-dimenziós intervallum/ akkor az

$\{\omega \mid t_1 < \tau(\omega) < t_2\}$ és $\{\omega \mid \xi_{\tau(\omega)}(\omega) \in B\} \in \mathcal{S}$ tartalmazások teljesülése szükséges. /Az első a t_1, t_2 időpontok közötti, a második pedig a B halmazba való kilépés eseménye./ Az utóbbi két feltétel épp azt követeli, hogy a τ és ξ_τ valószinüségi változó illetve vektorváltozó legyen.

Ahhoz, hogy egy adott G nyilt halmazból való kilépéshez kapcsolódó valószinüségi kérdésekkel foglalkozhassunk, modellünkre feltételt kell szabni.

<u>2.1 Feltétel:</u> Tegyük fel, hogy a $\{\xi_t\}$ Markov folyamat trajektóriái jobbról folytonosak, azaz minden $\omega \in \Omega$-ra és $t \in R^+$-ra teljesül a

$$\lim_{t' \downarrow t} \xi_{t'}(\omega) = \xi_t(\omega). \qquad /14/$$

<u>2.1 Megjegyzés:</u> A /14/ feltétel az átmeneti valószinüségekre ró ki követelményeket, és azok teljesülése esetén a kezdeti eloszlástól ill. feltételtől független.

A most felvetett kilépési problémák vizsgálatánál fontos szerepet játszik az 1.1 megjegyzésben definiált $\{\mathcal{F}_t^\xi\}_{t \in R^+}$ σ-algebra család, melyről könnyü belátni, hogy

1/ $t_1 < t_2$ mellett $\mathcal{F}_{t_1}^\xi \subset \mathcal{F}_{t_2}^\xi$ és

2/ ξ_t mérhető $\mathcal{F}_t^\xi$-re nézve minden $t \in R^+$ mellett.

/Azaz ξ_t nivóhalmazai $\mathcal{F}_t^\xi$-beli események/.

Annak érdekében azonban, hogy a kilépéssel kapcsolatos eseményeket is kényelmesen kezelhessük, szükségünk lesz a fenti $\{\mathcal{F}_t^\xi\}_{t \in R^+}$ család elemeinél általában bővebb eseményalgebrákból álló $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ rendszerre, melyek teljesitik az alábbit:

2.2 Feltétel:

1/ $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ ha $t_1, t_2 \in R^+,\ t_1 < t_2$.

2/ ξ_t legyen $\mathcal{F}_t$ mérhető

3/ Az $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ család jobbról folytonos, azaz $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

2.2 Megjegyzés: A 2.2 Feltétel 2/ pontjából következik az $\mathcal{F}_t^{\xi} \subset \mathcal{F}_t$ mig a 3/ az $\{\mathcal{F}_t^{\xi}\}_{t\in R^+}$ családra még folytonosan differenciálható trajektóriájú folyamatok esetén sem igaz általában.

E pont bevezetőjében irottaknak megfelelő kilépési időt az alábbiak szerint definiáljuk:

Ha G nyilt halmaz, vegyük a lezárását, $\bar{G} = D$ és ennek komplementerét, $C = R^n \setminus D$,ami nyilt halmaz.

Legyen $\tau_G(\omega) = \inf\{s \mid \xi_s(\omega) \in C\}$ és ennek megfelelően

$$\xi_{\tau_G}(\omega) = \xi_{\tau_G(\omega)}(\omega) = \lim_{s_n \searrow \tau_G(\omega)} \xi_{s_n}(\omega) \notin G \qquad /15/$$

megadja a kilépési helyet. A /15/-nél felhasználtuk a 2.1 feltételt és hogy

2.1 Tétel: Ha a $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ Markov folyamatra teljesül a 2.1 feltevés, akkor a G nyilt halmazhoz tartozó τ_G és ξ_{τ_G} függvények mérhetők $\mathcal{S}$ -re nézve.

Bizonyitás: Ehhez elegendő megmutatni, hogy a $\{\omega \mid \tau_G \geq t\} \in \mathcal{S}$. Felhasználva a jobbról folytonosságot és a D halmaz zártságát,

$$\{\omega \mid \tau_G \geq t\} = \{\omega \mid \xi_s \in D,\ s<t\} = \bigcap_{\substack{r<t \\ r \text{ racionális}}} \{\omega \mid \xi_r \in D\} \qquad /16/$$

ahol látszik, hogy a szóbanforgó nivóhalmaz előáll megszámlálható $\mathcal{S}$ -beli halmaz metszeteként, minden $t \in R^+$ -ra.

Ámde ha τ_G mérhető, megadható tetszőleges $\varepsilon>0$ -hoz egy $\{B_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathcal{S}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ diszjunkt felbontása Ω -nak, és $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ pozitiv számsorozat úgy, hogy a

$$\tau^{\varepsilon}(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot \chi_{B_i}(\omega) \qquad /17/$$

teljesiti a $\varepsilon > \tau^{\varepsilon}(\omega) - \tau(\omega) \geq 0$

feltételt.

Miután $\tau^{\varepsilon}(\omega)$ diszkrét értékeket vesz fel $\mathcal{S}$ -beli halmazokon, a $\xi_{\tau^{\varepsilon}(\omega)}(\omega)$ függvény mérhető, és miután $\tau^{\varepsilon}(\omega) \searrow \tau(\omega)$, $\varepsilon \to 0$ esetén, továbbá a folyamat jobbról folytonos, igy $\xi_{\tau^{\varepsilon}(\omega)}(\omega) \longrightarrow \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ ami mérhető függvények limesze, tehát maga is mérhető.

A definiciókból pedig kiderül, hogy tényleg $\xi_{\tau_G(\omega)}(\omega)$ vagy G határpontja, vagy annak külsejében halad, és tetszőleges kis $\delta>0$ mellett van olyan $s \in [\tau_G(\omega), \tau_G(\omega)+\delta]$ hogy $\xi_s(\omega) \in R^4 \setminus G$.

Ahogy az $\mathcal{F}_t^{\xi}$ esemény σ -algebra elemei olyan $\mathcal{S}$ -beli események összessége, melyek a $\{\xi_s\}_{0 \leq s \leq t}$ valószinüségi változó családra kirótt feltételek teljesülését jelentik, a /16/ alapján kézenfekvő lenne az a gondolat, hogy a G halmazból legfeljebb t időpontig való kilépés is az $\mathcal{F}_t^\xi$ -ben legyen /azaz $\{\tau_G \le t\} \in \mathcal{F}_t^\xi$/.

Ámde a /16/-ból csupán a $\{\tau_G < t\} \in \mathcal{F}_t^\xi$ következik, és igy

$$\{\tau_G \le t\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\tau_G < t+\tfrac{1}{m}\} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}^\xi_{t+\frac{1}{m}} \qquad /18/$$

ahol a 2.2 megjegyzés szerint általában $\bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}^\xi_{t+\frac{1}{m}} \supset \mathcal{F}_t^\xi$ teljesül, és egyenlőség csak jobbról folytonosság esetén.

Ez indokolja a 2.2 feltételbeli jobbról folytonos bővitést, amivel olyan $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ eseményalgebracsaládot kapunk, ahol $\mathcal{F}_t$ a legfeljebb t-ig való kilépés eseményeiről is számot ad.

<u>2.1 Definició:</u> Egy $\tau : \Omega \to R^+$ valószinüségi változót Markov pontnak nevezünk az $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ monoton növekedő σ -algebra családra nézve, ha $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

Még egy, a továbbiakban fontos, és logikailag is ide kivánkozó kérdést kell a kilépésekkel kapcsolatban megválaszolnunk:

Melyek a kilépés helyével kapcsolatos feltételek bekövetkezését jelentő $\mathcal{S}$ -beli események?

E probléma vizsgálatánál induljunk ki a /17/ formulából, méghozzá úgy, hogy egy rögzitett $t \in R^+$ mellett nézzük meg, mit állithatunk a legfeljebb t időpontig bekövetkezett kilépések térbeli eseményeiről.

Ha képezzük a

$$t \wedge \tau^\varepsilon := \min(t, \tau^\varepsilon) \qquad /19/$$

függvényeket / ε paraméterrel/, akkor ezek tartanak a

$t\wedge\tau_G$ függvényhez, és a $\{\tau_G\le t\}$ halmazon a $t\wedge\tau_G=\tau_G$. Ha már most képezzük a $\xi_{t\wedge\tau_G^\varepsilon}$ függvényhalmazt, ezek a függvények minden adott $\varepsilon>0$ mellett a $\{\xi_s\}_{0\le s\le t}$ valószinüségi változókból állnak elő úgy, hogy a $\xi_{t\wedge\tau^\varepsilon}$ függvény $\mathcal{F}_t^\xi$ mérhető és igy $\mathcal{F}_t$ mérhető is. Ámde a fentiek miatt $\xi_{t\wedge\tau_G}$ is $\mathcal{F}_t$ mérhető, és a $\{\tau_G\le t\}$ halmazon a $\xi_{t\wedge\tau_G}=\xi_{\tau_G}$ egyenlőség is teljesül.

Ez tehát azt jelenti, hogy a ξ_{τ_G} valószinüségi változó nivóhalmazai olyanok, hogy ha $A\in\mathcal{S}$ egy ilyen nivóhalmaz, ennek a $\{\tau_G\le t\}\in\mathcal{S}$ eseménnyel való metszete $\mathcal{F}_t$ -beli, azaz

$$A\cap\{\tau_G\le t\}\in\mathcal{F}_t\,. \qquad /20/$$

Ez indokolja egy Markov ponthoz az $\mathcal{F}_\tau\subset\mathcal{S}$ esemény σ-algebra alábbi definicióját:

2.2 Definició: Ha $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ és τ egy monoton σ-algebra család illetve Markov pont erre nézve, akkor

$$\mathcal{F}_\tau:=\{A\mid A\in\mathcal{S},\ A\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t,\ t\in R^+\} \qquad /21/$$

Könnyen belátható, hogy $\mathcal{F}_\tau\subset\mathcal{S}$ σ- algebra.

Fontos lesz számunkra az alábbi könnyen belátható állitás:

2.2 Tétel: Legyenek τ, $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ Markov pontok az $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ jobbról folytonos σ -algebra családra nézve. Ekkor

1/ $\tau\wedge t$ Markov pont, tetszőleges $t\in R^+$ -ra;

2/ $\max(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 \vee \tau_2$ Markov pont;

3/ $\tau_1 + \tau_2$ Markov pont;

4/ $\sup\limits_i \tau_i$ Markov pont;

5/ $\inf\limits_i \tau_i$ Markov pont;

6/ $\lim\limits_i \sup \tau_i$ Markov pont;

7/ $\lim\limits_i \inf \tau_i$ Markov pont;

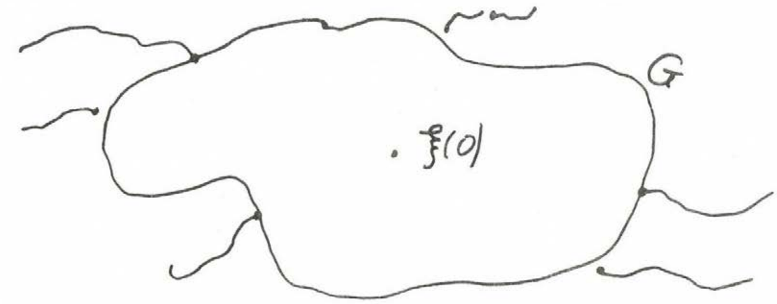
8/ Ha létezik, akkor $\lim \tau_i$ is Markov pont;

9/ Tetszőleges rögzitett $t \in R^+$ mint Ω -n állandó függvény, Markov pont.

Valójában e tétel azt mutatja, hogy a véletlen kilépési időpontokkal, azaz Markov pontokkal mindazokat a müveleteket megtehetjük, amit magával az idővel /R^+ elemeivel/.

3. ERŐS MARKOVITÁS

Az erős értelemben Markov folyamatok fogalma is igen fontos a stabilitási kérdések vizsgálatainál.



Az előző pont jelöléseit használva azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy egy folyamat hogyan viselkedik egy adott halmazból való kilpés után.

Láttuk, hogy egy G nyilt halmazból, azaz pontosabban ennek $\overline{G}$ lezárásából való kilépést a 2.1 és 2.2 feltételek teljesülése mellett egy τ_G Markov ponttal /véletlentől függő kilépési idővel/, egy ξ_{τ_G} valószinüségi változóval /véletlen kilépési hely/ és az utóbbira tett feltételek bekövetkezésének eseményeiből álló $\mathcal{F}_{\tau_G} \subset \mathcal{S}$ σ-eseményalgebrával jellemezhetjük.

Miután a 2.2 tétel értelmében tetszőleges $t \in R^+$ mellett a $\tau_G + t$ Markov pont lesz, és τ_G definiciója folytán a $\tau_G(\omega)+t$ minden $\omega \in \Omega$ mellett a $\overline{G}$ -ból való kilépés eseménye utáni időpontot jelöl, a $\overline{G}$ -ból való kilépés utáni viselkedését a folyamatnak célszerü a $\{\xi_{\tau_G+t}\}_{t\in R^+}$ folyamat segitségével vizsgálni. Ehhez természetes módon kapcsolódik az $\{\mathcal{F}_{\tau_G+t}\}_{t\in R^+}$ σ-algebracsalád /Könnyen belátható a 2.2 definició alapján, hogy ha $\tau_1 \leq \tau_2$, akkor $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$ /.

Eredetileg egy Markov folyamatunk volt. Felvetődik az a kérdés, hogy az újonnan definiált $\{\xi_{\tau_G+t}\}_{t\in R^+}$, $\{\mathcal{F}_{\tau_G+t}\}_{t\in R^+}$ folyamat Markov folyamat lesz-e?

Ennek feltétele az 1.1 megjegyzésben foglaltak szerint pontosan az, hogy ha $A \in \mathcal{B}(R^n)$, és $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in R^+$, akkor a

$$P(\xi_{\tau_G+t_2} \in A \mid \mathcal{F}_{\tau_G+t_1}) = P(t_1, \xi_{\tau_G+t_1}; t_2, A) \qquad /22/$$

teljesüljön a $P(\xi_{\tau_G+t_2} \in A \mid \mathcal{F}_{\tau_G+t_1})$ feltételes valószinüségre. /Vagyis a $\tau_G \leq s \leq \tau_G + t_1$ közötti ξ_{τ_G+s} valószinüségi változó családra szabott feltételek teljesülésének eseményeiből csak a legutolsóhoz kapcsolódó események befolyásolják az A-ba való átmenet valószinüségét/.

<u>3.1 Definició:</u> Ha a $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ Markov folyamat olyan, hogy tetszőleges τ Markov pontra a $\{\xi_{\tau+t}, \mathcal{F}_{\tau+t}\}_{t\in R^+}$-al definiált folyamat Markov folyamat, akkor a $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ folyamatot erős értelemben Markov folyamatnak nevezzük.

<u>3.1 Tétel:</u> Minden diszkrét idejü Markov folyamat erős értelemben Markov folyamat.

A folytonos idejü folyamatokra azonban általában már nem teljesül ez a tulajdonság.

A folytonos idejü esetben egy széleskörben ismert elegendő feltétel megfogalmazásához bevezetünk egy, a következő pontban felhasználásra kerülő fogalmat:

Jelöljük $B(R^4, \mathcal{B})$ -vel az R^4 -en értelmezett korlátos, Borel mérhető függvények osztályát /a folytonos, korlátos függvények mind ilyenek/. Az 1.1 definicióbeli átmenet valószinüségek meghatároznak minden $t_1, t_2 \in R^+, t_2 > t_1$ mellett egy $S^{[t_1,t_2]}$ transzformációját a $B(R^4, \mathcal{B})$ -nek az alábbi definicióval:

Ha $\varphi \in B(R^4, \mathcal{B})$, akkor

$$S^{[t_1,t_2]}(\varphi)(x) := \int_{\Omega} \varphi(\xi_{t_2}(\omega))\, P(t_1, x, t_2, d\omega) \qquad /23/$$

<u>3.2 Tétel:</u> Ha minden folytonos és korlátos $\varphi: R^4 \to R$ függvényre és $t_1, t_2 \in R^+, t_1 < t_2$ -re a $S^{[t_1,t_2]}\varphi$ függvény korlátos, folytonos, akkor az S -et generáló Markov folyamat erős értelemben is Markov folyamat.

Megjegyezzük, a müszaki és fizikai alkalmazásokban fellépő Markov folyamatok általában erős értelemben Markov folyamatok.

<u>3.3 Tétel:</u> Ha a $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in R^+}$ erős értelemben Markov folyamat és τ Markov pont az $\mathcal{F}$ monoton növő jobbról folytonos σ-algebra családra nézve, akkor a $\{\xi_{t \wedge \tau}, \mathcal{F}_{\tau \wedge t}\}_{t \in R^+}$ is erős értelemben vett Markov folyamat.

Ezután áttérünk a Markov dinamikáját más szempontból bemutató módszerre, amelyek egyben lehetőséget adnak ilyen folyamatok felépitésére.

4. ERŐS ÉS GYENGE INFINITEZIMÁLIS GENERÁTOROK

E pontban az a célunk, hogy módszert adjunk az 1.1 definicióban meghatározott átmeneti valószinüségek felépitésére.

Módszerünk alapját e valószinüségek differenciálegyenleteinek felállitása képezi. Természetesen, az átmeneti valószinüségek időfüggésének simaságára tett feltevésekkel ki kell jelölnünk azt a folyamatosztályt, melyen ezt megtehetjük.

Előzetesen azonban gondoljuk végig, hogy a diszkrét esetben /1/-el megadható dinamikájú folyamatok esetében általában miért nem lehet az /1/-el analóg trajektóriákra vonatkozó differenciálegyenletet felirni, és miért közelitjük a problémát az átmeneti valószinüségek oldaláról.

Az első kérdésre a válasz igen egyszerü:

Legyen $\omega \in \Omega$ egy rögzitett elemi esemény. Tudjuk, hogy a $\xi_t(\omega)$ trajektória mint t függvénye csupán jobbról folytonos, és megjegyezzük, hogy e függvények még igen jó tulajdonságú folytonos trajektóriájú folyamatok esetén is 1 valószinüséggel nem differenciálhatók. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{d\,\xi_t(\omega)}{dt} = \varphi(\xi_t(\omega), t, \omega) \qquad /24/$$

alakban az ilyen rendszerek dinamikája a folyamatoknak csupán igen szük osztályára irható le. Az is könnyen érthető, hogy általában a ξ_t folyamat lineáris transzformáltjai sem lesznek simák.

A /7/ összefüggés segitségével megadtunk a $\xi(t)$ folyamatnak egy <u>nem lineáris</u> transzformációját minden (t', y) kezdeti feltétel párhoz, amelyek az R ill. R^n Borel halmazain minden t-hez egy valószinüségi mértéket rendelnek. Az jól ismert tény, hogy a $\xi(t)$ valószinüségi változó és a neki megfelelő - a fenti valószinüségi mértékből származtatható - feltételes eloszlásfüggvény kölcsönösen egyértelmü kapcsolatban állnak egymással. Ezért az utóbbi - mint ezt az 1. pontban láttuk is - a dinamikával kapcsolatos információkat magában hordozza.

Ha most a t'-ben kezdeti feltételként nem az y-t irjuk elő, hanem egy $\xi(t')$ valószinüségi változót /mint ez az /1/-nél igen természetes/, akkor az 1. pont jelölései mellett a $\xi(t')$ valószinüségi változó eloszlásából származtatható $P_{\xi(t')}(d\xi(t'))$ valószinüségi mértékkel az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$P_{\xi(t)}(A \subset R^n) = \int_{R^n} P(t', y; t, A)\, P_{\xi(t')}(dy). \qquad /25/$$

Ha $T^{[t',t]}$ jelöli azt a leképezést, amely a /25/-tel a $P_{\xi(t')}(\cdot)$ -höz hozzárendeli $P_{\xi(t)}(\cdot)$-t, akkor a /13/-as Chapmen-Kolmogorov egyenlet az alábbi formában irható fel:

Ha $t' < s < t$; $t', s, t \in R^+$, akkor

$$T^{[s,t]} \circ T^{[t',s]} = T^{[t',t]} \qquad /26/$$

ahol a $\circ$ jelölés egymás utáni alkalmazást jelöl, azaz:

$$\left(T^{[s,t]} \circ T^{[t',s]}\right)\left(P_{\xi(t')}(\cdot)\right) := T^{[s,t]}\left(T^{[t',s]}\left(P_{\xi(t')}(\cdot)\right)\right) =$$

$$= T^{[s,t]}\left(P_{\xi(s)}(\cdot)\right) = P_{\xi(t)}(\cdot) = P^{[t',t]}\left(P_{\xi(t')}(\cdot)\right)$$

/27/

ami a /26/-ot igazolja.

A $\{T^{[t',t]}\}_{[t',t]\subset R^{+}}$ mértéktranszformációknak hasonló a szerepe a Markov folyamatok esetében, mint az $\{e^{A(t-t')}\}_{[t',t]\subset R^{+}}$ nxn-es mátrixoknak az

$$\dot{x} = Ax \qquad /28/$$

n ismeretlenes közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásainak előállitásában:

$$x(t) = e^{A(t-t')}\,x(t') \qquad /29/$$

és teljesül a /26/-nak megfelelő

$$e^{A(t-s)} \cdot e^{A(s-t')} = e^{A(t-t')} \qquad /30/$$

összefüggés.

Annak érdekében, hogy a /30/-ból /28/-ra /illetve egy ezzel ekvivalens $\dot{X} = A\cdot X$; X nxn-es mátrix függvény/ vezető differenciálást elvégezhessük, a /25/-tel definiált transzfromáció családot ki kellene terjeszteni egy vektortéren értelmezett lineáris leképezéssereggé. /A valószinüségi mérték esetén az R^n mértéke mindig 1. Tetszőleges $\lambda \neq 1$ esetén a $\lambda \cdot P$ mértékkel az R^n mértéke nem 1, és két valószinüségi mérték különbsége mint $\mathcal{B}(R^n)$ -en értelmezett halmazfüggvény általában felvesz pozitiv és negativ értékeket is, tehát nem lehet valószinüségi mérték./ Ez azért szükséges, hogy a differenciálhányadoshoz vezető különbségi hányadost képezhessük.

W jelölje a $\mathcal{B}(R^4)$ -en értelmezett korlátos változású előjeles mértékek terét, ami azt jelenti, hogy ha $\nu \in W$, akkor találhatók egyértelmüen olyan P_1, P_2 kölcsönösen szinguláris valószinüségi mértékek /a P_1 mérték szinguláris a P_2 -re nézve, ha van olyan $A \in \mathcal{B}(R^4)$ hogy $P_1(A)=1, P_2(A)=0$./ továbbá $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ számok, hogy minden $A \in \mathcal{B}(R^4)$ -re

$$\nu(A) = \alpha_1 P_1(A) - \alpha_2 \cdot P_2(A). \qquad /31/$$

A W vektortér, éspedig a $\|\nu\| := \alpha_1 + \alpha_2$ normával normált tér /sőt még teljes is/.

A $T^{[t',t]}: W \to W$ lineáris transzformációt a

$$T^{[t',t]}(\nu) := \alpha_1 \cdot T^{[t',t]}(P_1) - \alpha_2 T^{[t',t]}(P_2) \qquad /32/$$

egyenlőséggel definiálhatjuk, $[t',t] \subset R^+$.

Tekintetbe véve a W téren a norma definicióját és a /32/-t, azt kapjuk, hogy

$$\|T^{[t',t]}(\nu)\| \leq \|\nu\| \qquad /33/$$

ami azt jelenti, hogy a $T^{[t',t]}$ folytonos lineáris leképezés és $\|T^{[t',t]}\| \leq 1$ minden $[t',t] \subset R^+$ -ra.

Ha most tekintjük a /23/-al definiált $\{S^{[t',t]}\}_{[t',t] \subset R^+}$ leképezéssereget, amelynek elemei $B(R^4, \mathcal{B}) \to B(R^4, \mathcal{B})$ leképezések, akkor a Chapmen-Kolmogorov egyenlet megfelelője itt

$$S^{[t',s]} \circ S^{[s,t]} = S^{[t',t]} \qquad /34/$$

lesz. $S^{[t',t]}$ egy φ korlátos mérhető függvénnyel képezett $\varphi(\xi(t))$ függvényt a t'-beli korábbi feltételként szereplő értékek függvényévé transzformál és lineáris. A /33/ $S^{[t',t]}$ -vel is érvényes, ha $\varphi \in B(R^n, \mathcal{B})$ normáját $\sup_{z \in R^n} |\varphi(z)|$ -el definiáljuk. Igy az S -ek is folytonos leképezések, és teljesitik az $\| S^{[t',t]} \| \leq 1$ feltételt minden $[t',t] \subset R^+$ mellett.

Ha most a vizsgált Markov folyamatok körét szükitjük a homogén folyamatokra, az időeltolási transzformációknak további tulajdonságát kapjuk.

4.1 Definició: Az 1.1 definicióval megadott Markov folyamatot homogénnek nevezzük akkor, ha az átmeneti valószinüségekre tetszőleges $A \in \mathcal{B}(R^n)$, $[t',t] \subset R^+$ és $y \in R^n$ mellett teljesül a

$$P(t', y, t, A) = P(t-t', y, A) \qquad /35/$$

feltétel.

Ha a $t-t' =: s$ mellett bevezetjük a $T^{[t',t]} = T_1^s$ $S^{[t',t]} = S^s$ jelöléseket, akkor az alábbi állitások igazak:

4.1 Állitás: A $\{T^s\}_{s \in R^+}$, $\{S^s\}_{s \in R^+}$ transzformációcsaládok egyparaméteres kommutativ egységelemes félcsoportot alkotnak a /26/ és /34/ kompoziciókkal mint müveletekkel, azaz

$s_1, s_2 \in R^+$ mellett a

$$T^{s_1} \circ T^{s_2} = T^{s_2} \circ T^{s_1} = T^{s_1+s_2}$$

$$S^{s_1} \circ S^{s_2} = S^{s_2} \circ S^{s_1} = S^{s_1+s_2} \qquad /36/$$

összefüggések fennállnak.

Bizonyitás: Az egységelemhez elegendő azt meggondolni, hogy a

$$P(t,y,t,A)=\begin{cases}1 & \text{ha} \quad y\in A \\ 0 & \text{ha} \quad y\in R^n\setminus A\end{cases} = \chi_A(y) \qquad /37/$$

ami az átmeneti valószinüség értelmezésének nyilvánvaló következménye.

A többi nyilvánvaló a fentiek alapján.

Megjegyezzük, hogy a $T^{[t,t]}=I$ ill. $S^{[t,t]}=I$ is következik a /37/-ből.

Mielőtt a differenciálegyenleteink felállitására rátérnénk, foglaljuk össze a Markov folyamatoknak mint dinamikus rendszereknek az 1., és jelen pontban bemutatott ábrázolási módszereit:

Az egészet az alábbi ábra mutatja, ahol feltüntetjük a kapcsolatok jellegét is:

I $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$; $\xi_t: \Omega \to R^n$, $t\in R^+$

$\Updownarrow$ nem lin. kapcsolat a /7/ alapján

II. $\{T^{[t',t]}\}_{[t',t]\subset R^+}$; $T^{[t',t]}: W \to W$, $[t',t]\subset R^+$

$\Updownarrow$ transzponálás adja a kapcsolatot, lineáris, ezt nem tárgyaltuk.

III. $\{S^{[t',t]}\}_{[t',t]\subset R^+}$; $S^{[t',t]}: B(R^n,\mathcal{B}) \to B(R^n,\mathcal{B})$, $[t',t]\subset R^+$

A II. és III. ábrázolásban a folyamatot a $\mathcal{W}$ illetve $B(R^4, \mathcal{B})$ normált vektorterekben haladó görbékkel ábrázoljuk, melyeket a $\{T\}$ ill. $\{S\}$ lineáris időeltolási transzformációk határoznak meg a /29/ egyenlet R^n -ben haladó megoldásgörbéihez hasonlóan. /Ott $\{e^{A(t-s)}\}_{[t,s]\subset R^+}$ adja az időeltolási transzformációkat./

A /29/ egyenlet példájához hasonlóan megköveteljük, hogy minden $s < t_0 < t;\ s, t_0, t \in R^+$ mellett minden $\nu \in \mathcal{W}$ -re és minden $\varphi \in B(R^4, \mathcal{B})$ -re a

$$\nu_t = T^{[t_0,t]}\nu \quad \text{ill.} \quad \varphi_s = S^{[s,t_0]}\varphi \qquad /38/$$

$\mathcal{W}$-beli illetve $B(R^4, \mathcal{B})$ -beli görbék mint t ill. s függvényei, differenciálhatók legyenek azaz létezzenek a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\nu_{t+h} - \nu_t}{h} = \frac{d\nu_t}{dt} \quad \text{ill.} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{s-h} - \varphi_s}{-h} = \frac{d\varphi_s}{ds} \qquad /39/$$

határértékek.

Irjuk fel a T ill. S transzformációcsalád segitségével a /39/ határértékben szereplő különbségi hányadosokat:

$$\frac{T^{[t_0,t+h]} - T^{[t_0,t]}}{h}\nu = \frac{T^{[t,t+h]} - I}{h} \circ T^{[t_0,t]}\nu \qquad /40/$$

és

$$\frac{S^{[s-h,t_0]} - S^{[s,t_0]}}{h}\varphi = \frac{I - S^{[s-h,s]}}{h} \circ S^{[s,t_0]}\varphi$$

formulákat nyerjük, $h > 0$ feltevéssel.

A kivánt differenciálhatósággal ekvivalens az alábbi feltétel:

$$\lim_{h\to 0}\frac{T^{[t,t+h]}-I}{h}=Q_t$$

/41/

és

$$\lim_{h\to 0}\frac{S^{[t-h,t]}-I}{h}=Q_t^*$$

határértékek létezzenek. /E határértékeket $W \to W$ ill. $B(R^4,\mathcal{B}) \to B(R^4,\mathcal{B})$ lin leképezések normájában értjük, ezt itt nem részletezzük./

Az alábbi tétel igaz:

<u>4.1 Tétel:</u> Ha a /41/ határértékek léteznek, akkor a

$$\frac{d\,T^{[t_0,t]}}{dt}=Q_t\circ T^{[t_0,t]}$$

/42/

és

$$-\frac{d\,S^{[s,t_0]}}{ds}=Q_s^*\circ S^{[s,t_0]}$$

összefüggések érvényesek, továbbá tetszőleges $\nu\in W$ ill. $\varphi\in B(R^4,\mathcal{B})$ mellett

$$\frac{d\nu_t}{dt}=Q_t\,\nu_t \qquad \text{és} \qquad -\frac{d\varphi_s}{ds}=Q_s^*\,\varphi_s \qquad /43/$$

lineáris differenciálegyenletek is igazak.

<u>4.1 Megjegyzés:</u> A /42/ illetve /43/ egyenletpárok első egyenleteit nevezzük Kolmogorov előre, a másodikat pedig Kolmogorov hátra egyenletnek.

<u>4.2 Megjegyzés:</u> Homogén esetben a $Q_t: W\to W$ illetve

$Q_t^*: B(R^4, \mathcal{B}) \to B(R^4, \mathcal{B})$ folytonos lineáris leképezések nem függenek a t paramétertől. A

$$\frac{dT^t}{dt} = Q \circ T^t \quad , \quad -\frac{dS^s}{ds} = Q^* \circ S^s \qquad /44/$$

illetve

$$\frac{d\nu_t}{dt} = Q\nu_t \quad , \quad -\frac{d\varphi_s}{ds} = Q^*\varphi_s \qquad /45/$$

egyenletekkel a /29/ egyenlet analógjait nyerjük.

__4.3 Megjegyzés:__ Ha a $\{T^s\}_{s\in R^+}$ transzformációcsaládra teljesül minden $t \in R^+$ mellett a

$$\lim_{s\downarrow 0} T^s = I \qquad /46/$$

folytonossági megszoritás, amiből következik, hogy a

$$\lim_{s\downarrow 0} S^s = I \qquad /47/$$

is fennáll, akkor a W illetve a $B(R^4, \mathcal{B})$ téren megadható olyan mindenütt sürü halmaz, hogy ezekre /40/ különbségi hányadosoknak létezik határértéke, és igy kapunk nem folytonos Q illetve Q^* lineáris leképezéseket, melyek értelmezési tartományai azok a mindenütt sürü halmazok, melyeket épp a határérték létezése jelöl ki. Ezekkel a /42/ egyenletek épp úgy felirhatók, mint a fenti esetben, és a folyamatot ezek az egyenletek ugyanúgy egyértelmüen meghatározzák mint a fenti esetben.

Ezt a Hille-Yosida tétel mondja ki.

__4.4 Megjegyzés:__ A 4.1 tételben szereplő Q_t, Q_t^*

folytonos lineáris leképezéseket nevezzük erős infinitezimális generátoroknak, mig a 4.3 megjegyzésben definiáltakat gyenge infinitezimális generátoroknak.

4.5 Megjegyzés: Az egyenletek értelmezéséből azonnal látszik, hogy a /43/ egyenletpár első egyenletének megoldása egy adott $t_0 \in R^+$, $P_{t_0} \in W$ kezdetiértékproblémával minden $t \in R^+$ -ra megadja annak a Markov folyamatnak a $P_{\xi_t} \in W$ valószinüségi mértékeit, melyre a t_0 -ban a $\xi(t_0)$ eloszlása épp a P_{t_0} valószinüségi mértéket generálja.

A /43/ második egyenlete pedig, ha a $0 < t_0 \in R^+$ -ban egy $A \in \mathcal{B}(R^4)$ halmaz $\chi_A \in B(R^4, \mathcal{B})$ karakterisztikus függvényét irjuk elő kezdetiérték problémának, akkor $S < t_0$ mellett a φ_s, $\varphi_{t_0} = \chi_A$ megoldás épp a

$$\varphi_s(y) = P(s, y; t_0, A) \, , \; y \in R^4 \qquad /48/$$

átmenti valószinüséget adja meg.

4.6 Megjegyzés: Mivel

$$\frac{d}{dt}\left(S^{[t, t_0]} \varphi \right) = Q_t^* \circ S^{[t, t_0]} \varphi$$

ezért

$$\int_{t_0}^{t} \left(Q_t^* \circ S^{[t, t_0]} \varphi \right)(x) \, dt = S^{[t, t_0]}(\varphi)(x) - \varphi(x) \qquad /49/$$

Belátható, hogyha φ benne van Q_t^* értelmezési tartományában, azaz φ_t differenciálható görbe a $B(R^q, \mathcal{B})$ -en akkor $\tilde{\varphi}_t$ is differenciálható görbe, /ezen azt értjük, hogy $S^{[t_0,t]}\varphi - S^{[t_0,t_0]}\varphi$ az első változójában differenciálható/ és

$$\frac{d\tilde{\varphi}_{t_0}}{dt_0} = S^{[t,t_0]}\, Q_{t_0}^* \varphi .$$

Ha most $\{\xi_t\}_{t\in R^+}$ Markov-folyamat, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ jobbról folytonos monoton növő σ -algebra család, τ pedig Markov pont erre nézve, és a $\xi_{t_0\wedge\tau} = x$ feltétellel vett feltételes várható értéket $E_{(\xi_{t_0}\wedge\tau)}$ -val jelöljük, akkor érvényes az úgynevezett Dynkin formula:

$$E_{(\xi_{t_0}\wedge\tau)}\left(\int_{t_0\wedge\tau}^{t\wedge\tau}(Q_s^*\varphi)(\xi_s)\,ds\right) = E_{(\xi_{t_0}\wedge\tau)}\left(\varphi(\xi_{t\wedge\tau}) - \varphi(\xi_{t_0\wedge\tau})\right)$$

Legyen $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ erős értelemben vett Markov folyamat és $G \subset R^n$ nyilt halmaz. Ha τ a G -ből való első kilépés időpontja, akkor

$$\tilde{\xi}_t = \xi_{t\wedge\tau} \tag{50}$$

a 3.3 tétel szerint szintén erős értelemben vett Markov folyamat lesz az $\{\mathcal{F}_{t\wedge\tau}\}_{t\in R^+}$ σ -algebracsaláddal.

Tegyük fel, hogy a ξ_t folyamatnak a W és a $B(R^q, \mathcal{B})$ téren létezik a

1/ Q_t, Q_t^* erős értelemben vett infinitezimális generátora,

2/ homogén ξ_t folyamat esetén a Q illetve Q^* gyenge értelemben vett infinitezimális generátora.

A következő tétel a ξ_t és a $\tilde{\xi}_t$ folyamatok infinitezimális generátorai közötti kapcsolatra vet fényt.

4.2 Tétel Legyen $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ erős értelemben vett homogén Markov folyamat és tegyük fel, hogy a $P(x,s,A)$ átmenet valószinüségek $s=0$ -ban differenciálhatók. Akkor a tetszőleges, rögzitett $G\subset R^n$ nyilt halmazból való τ véletlen kilépési idővel képezett folyamat is erős értelemben vett homogén Markov folyamat és a hozzátartozó $\tilde{P}(x,s,A)$ átmenet valószinüségek 0 -ban differenciálhatók. Emellett, ha a φ korlátos, Borel-mérhető függvény Q^* értelmezési tartományában van, akkor φ benne van a $\tilde{\xi}_t$ -hez tartozó Q^*_G infinitezimális generátor értelmezési tartományában is és

$$Q^*_G\varphi = \chi_G \cdot Q^*\varphi$$

4.8 Megjegyzés: A W téren értelmezett Q illetve Q_G infinitezimális generátorokra is igaz az állitás, azaz ha $\nu\in W$ benne van Q értelmezési tartományában, akkor Q_G -ében is benne van és

$$(Q_G\nu)(A) = (Q\nu)(A\cap G)$$

minden $A\in\mathcal{B}(R^n)$ Borel halmazra.

4.9 Megjegyzés: A 4.2 tétel a homogenitás feltételezése nélkül is igaz, ha a 4.2 tételben szereplő differenciálhatósági feltételt azzal helyettesitjük, hogy

$$\lim_{s \searrow t} \frac{P(t,x,s,A) - \chi_A(x)}{s-t}$$

minden $t \in R^+$ esetén létezik.

Ekkor az erős infinitezimális generátorokra a következő összefüggések állnak fenn:

$$Q^*_{t,G}\varphi = \chi_G \cdot Q^*_t \cdot \varphi$$

illetve

$$(Q_{t,G}\nu)(A) = (Q_t\nu)(A \cap G)$$

minden $t \in R^+$ mellett.

A most következő két részben a kapott differenciálegyenletek konkrét alakjait fogjuk felirni, és megadjuk az átmeneti valószinüségekre a folytonossági és differenciálhatósági feltételek konkrét alakját.

5. MARKOV-FÉLE UGRÓ FOLYAMATOK

E pontban olyan Markov folyamatokkal foglalkozunk, melyek trajektóriái jobbról folytonosak, de ugrásaik lehetnek, méghozzá minden $t \in R^+$ mellett pozitiv valószinüséggel.

Ebben a pontban felirjuk az előző pontban kapott /42/, /43/ /44/, /45/ differenciálegyenletek konkrét alakját két folyamatosztályra.

Első lépésként azonban a 4.3 megjegyzésben emlitett folytonosságnak és a 4.1 tétel feltételként szereplő differenciálhatóságnak adjuk meg az átmeneti valószinüségekre vonatkozó szükséges és elegendő feltételét:

5.1 Tétel: Ha tetszőleges $t \in R^+$, $s \in R^+$, $A \in \mathcal{B}(R^n)$ mellett a $P(t,x,s,A)$ átmeneti valószinüség teljesiti a

$$\lim_{s \searrow t} P(t,x,s,A) = \chi_A(x)$$

feltételt, akkor a $T^{[t,s]} \to I$, $s \searrow t$ mellett.

5.2 Tétel: A $\{T^{[t,s]}\}_{[t,s] \subset R^+}$ transzformációcsalád erős értelemben való differenciálhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a

$$\lim_{s \searrow t} \frac{P(t,x,s,A) - \chi_A(x)}{s-t} = q(t,x,A) \qquad /50/$$

határérték létezzék, éspedig $(t,x,A) \in R^+ \times R^n \times \mathcal{B}(R^n)$ -ben egyenletesen.

Nyilvánvalóan látszik, hogy az /52/- es feltétel erősebb mint az /51/-es.

A fenti két tétel feltételeiből indokoltnak tünik a Markov-féle ugró folyamatok osztályának definiálása, az alábbiak szerint:

<u>5.1 Definició:</u> A tágabb értelemben vett Markov folyamatoknak azt az osztályát, melyek átmeneti valószinüségei teljesitik az alábbi 1/, 2/ feltételeket, Markov-féle ugró folyamatoknak nevezzük:

1/ $$\frac{P(t,x,s,A)-\chi_A(x)}{s-t} \to q(t,x,A),\ s \searrow t$$

egyenletesen $(t,x,A) \in R^+ \times R^n \times \mathcal{B}(R^n)$ -ben.

2/ A $q(t,x,A)$ tetszőleges $(x,A) \in R^n \times \mathcal{B}(R^n)$ mellett t-ben folytonos éspedig egyenletesen $(x,A) \in R^n \times \mathcal{B}(R^n)$ -ben.

<u>5.1 Megjegyzés:</u> Az 1/ feltételből következik, hogy a $q(t,x,A)$ tetszőleges $(t,x) \in R^+ \times R^n$ mellett mint $A \in \mathcal{B}(R^n)$ függvénye W -beli és igy az is igaz, hogy

$$|q(t,x,A)| \le k \qquad /53/$$

a $(t,x,A) \in R^+ \times R^n \times \mathcal{B}(R^n)$ -től független k állandóval.

<u>5.2 Megjegyzés:</u> Az 5.1 megjegyzésben és a fenti két tételben foglaltakat nem bizonyitjuk, csupán annyit füzünk hozzájuk, hogy az előző pontbeli operátor normában való

konvergencia épp a fenti minden $A \in \mathcal{B}(R^n)$, $t \in R^+$ és $x \in R^n$ -ben való egyenletes konvergenciával ekvivalens.

Vizsgáljuk meg most a kapott $q(t,x,A)$ függvényt. Könnyen belátható, hogy

1/ $q(t,x,R^n) = 0$. /54/

2/ $$q(t,x,A) = \lim_{s \downarrow t} \frac{P(t,x,s,A) - \chi_A(x)}{s-t} = \lim_{s \downarrow t} \frac{P(t,x,s,A)}{s-t} \geq 0, \text{ ha } x \notin A. \qquad /55/$$

3/ $q(t,x,\{x\}) = -q(t,x,X \setminus \{x\}) \leq 0$.

Vezessük be ezután az alábbi két függvényt:

$$q(t,x) := -q(t,x,\{x\}) = q(t,x,X \setminus \{x\}) \qquad /56/$$

és

$$\Pi(t,x,A) := \begin{cases} \dfrac{q(t,x,A \setminus \{x\})}{q(t,x)} & \text{ha } q(t,x) \neq 0 \\ \chi_A(x) & \text{ha } q(t,x) = 0 \end{cases} \qquad /57/$$

Az utóbbi két függvénynek az alábbi valószinüségelméleti interpretációja adható:

A $q(t,x)$ függvény /56/-os definiciójából következik, hogy

$$P(t,x,t+\Delta t,\{x\}) = 1 - (q(t,x) + \varepsilon(\Delta t))\Delta t \qquad /58/$$

ahol ε a Δt függvénye, és $\varepsilon(\Delta t) \to 0$ ha $\Delta t \to 0$.

Ebből következik, hogy $q(t,x) \cdot \Delta t$ megadja annak valószinüségét, hogy ha a rendszer a t időpontban az x állapotban volt, $t+\Delta t$ -ben x-től különbözőben lesz.

A fenti gondolatmenet megismétlésével a $q(t,x,A \setminus \{x\}) \cdot \Delta t$-re azt kapjuk, hogy ez az x-től különböző A-beli állapotba való átlépés valószinüsége a $t+\Delta t$ időpontra. Ezeket figyelembe véve:

$$\Pi(t,x,A) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t,x,t+\Delta t, A\setminus\{x\})}{P(t,x,t+\Delta t, X\setminus\{x\})} \qquad /59/$$

Tehát $\Pi(t,x,A)$ annak feltételes valószinüségét jelenti, hogy a rendszer a t időpontban egy $x \in R^4$ pontból biztosan kimozdul de az $A \in \mathcal{B}(R^4)$ -be lép vagy ott marad.

A fentiekből következik a $q(t,x,A)$ alábbi valószinüségi interpretációja:

$$q(t,x,A) = q(t,x)\left[\Pi(t,x,A) - \chi_A(x)\right] \qquad /60/$$

Most megadjuk a Markov féle ugrófolyamatok esetére a /42/, /43/ egyenletek konkrét alakját. Ehhez elegendő a Q_t ill. Q_t^* leképezések konkrét megadása.

<u>5.3 Tétel:</u> A $\{T^{[t_0,t]}\}_{[t_0,t]\subset R^+}$ ill. $\{S^{[s,t_0]}\}_{[s,t_0]\subset R^+}$ időeltolási transzformációk mint t ill. s függvényei erős értelemben egyenletesen differenciálhatók Markov-féle ugrófolyamatok esetében, és a $Q_t: W \to W$ ill. a $Q_t^*: B(R^4,\mathcal{B}) \to B(R^4,\mathcal{B})$ leképezések az alábbiak lesznek:

$$(Q_t w)(A) = \int_{R^4} q(t,x,A)\, w(dx) =$$

$$= -\int_A q(t,x)\, w(dx) + \int_{R^4} q(t,x)\,\Pi(t,x,A)\, w(dx) \qquad /61/$$

$w \in W$ mellett,

$$(Q_t^* f)(x) = \int_{R^4} f(z)\, q(t,x,dz) =$$

$$= q(t,x)\left[-f(x) + \int_{R^4} f(z)\,\Pi(t,x,dz)\right] \qquad /62/$$

tetszőleges $f \in B(R^n, \mathcal{B})$ mellett.

A differenciálegyenleteink pedig az alábbi konkrét alakot öltik:

$$dT^{[t_0,t]} = Q_t \cdot T^{[t_0,t]},$$

$$\frac{d\nu_t(A)}{dt} = \int_{R^n} q(t,x,A)\,\nu_t(dx) = -\int_A q(t,x)\,\nu_t(dx) + \int_{R^n} q(t,x)\cdot\Pi(t,x,A)\,\nu_t(dx) \qquad /63/$$

illetve

$$-\frac{dS^{[s,t_0]}}{ds} = Q_s^* \cdot S^{[s,t_0]},$$

$$-\frac{d\varphi_s(x)}{ds} = \int_{R^n} \varphi_s(z)\,q(t,x,dz) = q(t,x)\Big[-\varphi_s(x) + \int_{R^n} \varphi_s(z)\,\Pi(t,x,dz)\Big] \qquad /64/$$

5.3 Megjegyzés: A $P(s,x,t,A)$ átmeneti valószinüségek tehát eleget tesznek a

$$\frac{\partial P(s,x,t,A)}{\partial s} = -\int_{R^n} P(s,z,t,A)\,q(t,x,dz) =$$
$$= q(s,x)\Big[P(s,x,t,A) - \int_{R^n} P(s,z,t,A)\,\Pi(s,x,dz)\Big] \qquad /65/$$

egyenletnek $s<t,\ t,s \in R^+$ mellett.

A fenti egyenletek megoldhatóságára az alábbiak érvényesek:

Jelöljük $\tilde{q}(t,x,A)$ -val az alábbi függvényt:

$$\tilde{q}(t,x,A) := q(t,x,A \setminus \{x\}).$$

5.1 Feltétel:

1/ Tetszőleges rögzitett $(t,x) \in R^+ \times R^n$ mellett $\tilde{q}(t,x,A)$ mérték és $q(t,x) = \tilde{q}(t,x,X)$.

2/ Rögzitett $(x,A) \in R^n \times \mathcal{B}(R^n)$ mellett a $\tilde{q}(t,x,A)$ folytonos éspedig (x,A) -ban egyenletesen, és

$(t,A) \in R^+ \times \mathcal{B}(R^n)$ mellett $\tilde{q}$ x-ben mérhető.

3/ $\tilde{q}(t,x,A) \leq k$, $(t,x,A) \in R^+ \times R^n \times \mathcal{B}(R^n)$ mellett.

<u>5.4 Tétel:</u> Az 5.1 feltétel teljesülése esetén a /63/, /65/ egyenleteknek minden kezdetiértékproblémára létezik éspedig egyértelmü megoldása.

Nézzük meg most egy fontos folyamatosztályra a fenti egyenletek alakját. Ezek a véges állapotú Markov láncok..

Legyen X egy véges, n-elemü halmaz, az állapotok halmaza.

Ha a $t \in R^+$ időpontban a folyamat az $i \in X$ állapotban volt, annak átmeneti valószinüsége, hogy a $t' > t$ -ben a $j \in X$ -ben lesz, $p_{ij}(t,t')$ jelöli, $1 \leq i,j \leq n$.

Azt azonnal látjuk, hogy a t, t' átmenetek valószinüségeit $n \times n$ -es mátrixokba rendezhetjük, sőt a Chapmen-Kolmogorov egyenletet is felirhatjuk

$$p_{ik}(t,t') = \sum_{l=1}^{n} p_{il}(t,s)\, p_{lk}(s,t') \qquad /66/$$

vagy

$$P(t,t') = P(t,s) \cdot P(s,t') \qquad /67/$$

alakban, $t < s < t'$ mellett, ahol

$$P(t,t') = \left(p_{ij}(t,t') \right) \qquad /68/$$

$n \times n$ mátrix, melyre teljesülnek az alábbiak:

1/ $p_{ij}(t,t') \geq 0$

2/ $\sum_{j \in X} p_{ij}(t,t') = 1$, minden $i \in X$ esetén.

Megköveteljük, hogy

$$\lim_{t \searrow t'} p_{ij}(t,t') = \delta_{ij} \ , \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & \text{ha } i=j \\ 0 \ , & \text{ha } i \neq j \end{cases} .$$

Homogén a Markov lánc, ha

$$P(t,t') = P(t'-t) \qquad /69/$$

Homogén Markov láncok esetében mindig léteznek az alábbi határértékek:

$$\lim_{t' \searrow t} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0) = q_{ij} < \infty \ , \ i \neq j \qquad /70/$$

mellett, illetve

$$\lim_{t' \searrow t} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = q_i < \infty . \qquad /71/$$

A bevezetett /70/ /71/ deriváltakkal megkapjuk a Kolmogorov első illetve második egyenleteket az alábbi formákban:

$$p'_{ij}(t) = - q_i \cdot p_{ij}(t) + \sum_{k \in X \setminus \{i\}} q_{ik} \cdot p_{kj}(t) \qquad /72/$$

illetve

$$p'_{ij}(t) = - p_{ij}(t) \cdot q_j + \sum_{k \in X \setminus \{j\}} p_{ik}(t) q_{kj} \qquad /73/$$

$i,j \in X$ mellett.

Ha $q_i = - \dfrac{d p_{ii}(0)}{dt}$, akkor még az alábbi egyenletet is felirhatjuk:

$$P'(t) = P'(0) \cdot P(t) \qquad /74/$$

i.l.

$$P'(t) = P(t) \cdot P'(0) \qquad /75/$$

a /70/, /71/-nek megfelelően.

Ha most a /74/, /75/ egyenleteket a legegyszerübb 2 dimenziós esetben felirjuk, az alábbi eredményre jutunk: Jelöljük a két állapotot 0 ill. 1-el. A $0 \to 1, 1 \to 0$ átmenetek valószinüségeit adjuk meg kis $0 < h$ mellett

$$\begin{aligned} p_{01}(h) &= \lambda \cdot h + O(h) \\ p_{10}(h) &= \mu \cdot h + O(h) \end{aligned} \qquad /76/$$

alakban, ami azt jelenti, hogy a

$$q_{01} = q_0 = \lambda \quad , \quad q_1 = q_{10} = \mu$$

A /75/ Kolmogorov egyenletet ekkor

$$\begin{aligned} p_{00}'(t) &= -\lambda \cdot p_{00}(t) + \mu \cdot p_{01}(t) \\ p_{01}'(t) &= -\mu \cdot p_{01}(t) + \lambda \cdot p_{00}(t) \\ p_{10}'(t) &= -\lambda \cdot p_{10}(t) + \mu \cdot p_{11}(t) \\ p_{11}'(t) &= -\mu \cdot p_{11}(t) + \lambda \cdot p_{10}(t) \end{aligned}$$

alakot ölti, megoldása pedig

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ p_{11}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ p_{10}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \\ p_{01}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy tényleg ugró folyamatot kaptunk, az átmeneteket ugyanis jól ismert Poisson folyamatok irják le.

<u>Összefoglalva:</u> A Q_t, Q_t^* lineáris folytonos leképe-

zéseket meghatározó $q(t,x,A)$ függvények meghatározhatók, ha megadjuk a $q(t,x,\{x\})$ mennyiséget, amelynek Δt -szerese megadja annak a valószinüségét, hogy a $t+\Delta t$ -ben is X -ben marad a folyamat, és a $\Pi(t,x,A)$ feltételes valószinüséget, ami annak valószinüsége, hogy a folyamat $t+\Delta t$ -ben X -ből ugyan elmozdul, de A-ba lép.

Az egzisztenciatétel mutatja, hogy a Markov-féle ugrófolyamatok osztályára igaz az éppen, hogy a Kolmogorov egyenletpár megoldásaiként az átmeneti valószinüségeik meghatározhatók.

6. DIFFUZIÓS FOLYAMATOK

A Markov-féle ugrófolyamatok esetében annyit követeltünk meg az 5.1 definició 1/ pontjában, hogy a

$$\lim_{s \searrow t} \frac{P(t, x, s, A)}{s-t} = q(t, x, A) \qquad /77/$$

fennálljon, és $q(t, x, A)$ akármilyen pozitiv értéket felvehetett, függetlenül attól, hogy $x \in A$ vagy $x \notin A$

Diffuziós folyamatok esetében az alábbi egyenlőség fennállását követeljük meg tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett,

$$\lim_{s \searrow t} \frac{P(t, x, s, R^n \setminus G_\varepsilon(x))}{s-t} = 0 \quad , \; x \in R^n \qquad /78/$$

ahol $G_\varepsilon(x)$ az x körüli ε sugarú gömböt jelöli.

Belátható a következő tétel:

<u>6.1 Tétel:</u> Ha egy Markov folyamat teljesiti a /78/-as feltételt, akkor trajektóriái 1 valószinüséggel folytonosak.

<u>6.1 Definició:</u> A $\{\xi_t\}_{t \in R^+}$, R^n -beli Markov folyamatot diffuziós folyamatnak nevezzük, ha az átmeneti valószinüségekre teljesitik az alábbi feltételeket:

1/ teljesül a /78/ feltétel

2/ Tetszőleges $1 \le i, j \le n$ mellett

léteznek az

$$\lim_{s \searrow t} \frac{\int_{G_\varepsilon(x)} (y_i - x_i) P(t, x, s, dy)}{s-t} = a_i (t, x) \qquad /79/$$

és az

$$\lim_{s \searrow t} \frac{\int\limits_{-Q_\varepsilon(x)} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P(t, x, s, dy)}{s - t} = b_{ij}(t,x) \qquad /80/$$

határértékek méghozzá t-ben, x-ben és $\varepsilon > 0$ -ban egyenletesen.

6.1 Megjegyzés: Az $(a_1(t,x), a_2(t,x), \ldots, a_n(t,x))$ vektort nevezzük átmenti vektornak, mig a $\left(b_{ij}(t,x)\right) = b(t,x)$ mátrixot diffuiziós métrixnak.

A most következő két tétellel megadjuk a /43/ egyenletpár itt érvényes formáit. A második egyenletet általánosan, az elsőt speciális esetre adjuk meg.

6.2 Tétel: Ha $f \in B(R^n, \mathcal{B})$ olyan, hogy az

$$U(t,x) := \int_{R^n} f(y) P(t, x, s, dy) \qquad /81/$$

$n+1$ változós függvénynek léteznek az x szerinti első és másodrendü parciális deriváltjai, és folytonosak, továbbá az $a(t,x)$ vektorfüggvény és $b(t,x)$ mátrixfüggvény folytonos, akkor $x \in R^n$, $t \in [0,s)$ -re a $\frac{\partial U}{\partial t}$ létezik, és teljesül a

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \qquad /82/$$

egyenlet a $\lim_{t \to s} U(t,x) = f(x)$ kezdeti feltétellel.

Ha továbbá a $P(t,x,s,A)$ átmeneti valószinüség egy $p(t,x,s,y)$ sürüségfüggvényből származtatható

$$P(t, x, s, A) = \int_A p(t, x, s, y)\, dy \qquad /83/$$

formában, akkor a /43/ első egyenletét igy irhatjuk:

6.3 Tétel: Ha a ξ_t diffuziós folyamat $p(t,x,s,y)$ átmeneti sürüségfügvényével képezett

$$\frac{\partial p(t,x,s,y)}{\partial s}, \quad \frac{\partial (a_i(t,y)\cdot p(t,x,s,y))}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial^2 (b_{ij}(t,y)\cdot p(t,x,s,y))}{\partial y_i\, \partial y_j} \qquad /84/$$

parciális deriváltak léteznek és folytonosak $1 \le i,j \le n$ mellett, akkor a $p(t,x,s,y)$ átmeneti sürüségfüggvény az $(s,y) \in (t,T] \times R^n$ tartományon eleget tesz a

$$\frac{\partial p(t,x,s,y)}{\partial s} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_i(t,y)\cdot p(t,x,s,y)\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_j}\left(b_{ij}(t,y)\cdot p(t,x,s,y)\right) \qquad /84/$$

egyenletnek.

A 6.2 tétel egyenletét Kolmogorov egyenletnek, a 6.3 tétel egyenletét pedig Focker-Planck egyenletnek nevezik.

6.2 Megjegyzés: Ha F_0 a $\xi(0)$ valószinüségi változó sürüségfüggvénye, akkor a /84/ egyenletet az x változóban t=0 mellett F_0 szerint integrálva, és $F(t,y)$ -al jelölve a $\xi(t)$ valószinüségi változó sürüségfüggvényét, a

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_i(t,y)\cdot F(t,y)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_j}\left(b_{ij}(t,y)\cdot F(t,y)\right) \qquad /85/$$

egyenlethez jutunk, $F(0,y) = F_0(y)$ kezdetiértékproblémával.

6.3 Megjegyzés: A Kolmogorov egyenletet a /62/-es összefüggésre alkalmazva diffuziós folyamat esetén a Q_t^* infinitezimális generátor következő előállitását kapjuk:

$$(Q_t^* f)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}.$$

A /84/ egyenletet oldjuk meg abban a speciális esetben, ha $a(t,y) \equiv 0$, $(t,y) \in R^+ \times R^n$ mellett, és $b(t,y) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I$ egységmátrix. Ekkor egyenletünk a

$$\frac{\partial p(t,x,s,y)}{\partial s} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} p(t,x,s,y) = 0 \qquad /86/$$

alakot ölti. Ennek megoldása, mint ez jól ismert a parciális differenciálegyenletek elméletéből, a

$$p(t,x,s,y) = \frac{1}{2^n(\pi\cdot(s-t))^{n/2}} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4(s-t)}}, \qquad /87/$$

amiről tudjuk, hogy épp a Brown mozgás átmeneti sürüségfüggvénye.

A Brown mozgás folyamat azonban jól ismert, a 4. pontban leirt I. ábrázolásával együtt. Az utóbbi azt jelenti, hogy ismert egy olyan $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ valószinüségi mező, egy $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ monoton növekedő jobbról folytonos eseményalgebracsaláddal, egy $\{w_t\}_{t\in R^+}$ — $w_t : \Omega \to R^n$, w_t mérhető $\mathcal{F}_t$ -re minden $t \in R^+$ mellett - valószinüségi változócsaláddal, ami az R^n -beli véletlen bolyongás modellje a /87/ átmeneti sürüségfüggvénnyel. E folyamat másként fehérzaj vagy Wiener-folyamat néven ismert.

Tudjuk továbbá, hogy a Wiener folyamat trajektóriái

1 valószinüséggel folytonosak, és 1 valószinüséggel nem differenciálhatók.

Mivel müszaki problémák modellezésénél és stabilitási vizsgálatoknál a szóbanforgó ξ_t folyamat realizációi játszanak fontos szerepet, hiszen ezeket tudjuk megfigyelni, ezért igen fontos az, hogy a folyamataink fejlődésének dinamikáját az I. ábrázolásban is jellemezzük, és ezzel együtt magukat a folyamatokat modellezzük. Ez azonban nem vihető keresztül az /1/-egyenlettel analóg hagyományos differenciálegyenletekkel, a fent emlitett nem differenciálható trajektóriák miatt.

E kérdéskör vizsgálata a sztochasztikus differenciálegyenletek elméletéhez vezet. A modell felépités alapgondolata pedig az, hogy a diffuziós folyamatoknak legalább egy részéhez épitsük fel úgy az I. ábrázolást, hogy a ξ_t diffuziós folyamatot előállitjuk egy differenciálható trajektóriájú és egy fehér zaj folyamat kombinációiból álló folyamat összegeként.

Ez a tárgya a következő pontnak.

7. SZTOCHASZTIKUS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Mielőtt a sztochasztikus differenciálegyenletekre rátérnénk, röviden összefoglaljuk az Ito-féle sztochasztikus integrál és ennek kapcsán a sztochasztikus differenciál fogalmát.

Legyen $\{W_t\}_{t\in[a,b]\subset R^+}$ Wiener folyamat és $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ egy monoton növekedő jobbról folytonos σ -algebra család. Tegyük fel, hogy a W_t mérhető az $\mathcal{F}_t$ -re nézve minden $t\in[a,b]$ mellett, és $W(t+h)-W(t)$ független $\mathcal{F}_t$ eseményeitől. Vezessük be ezután az alábbi két - $\mathcal{M}_{[a,b]}$ -vel ill. $\mathcal{P}_{[a,b]}$ -vel jelölt - függvényosztályt:

Legyen $[a,b]\subset R^+$ rögzitett.

<u>7.1 Definició:</u> $\mathcal{M}_{[a,b]}$ azon $f:\Omega\times[a,b]\to R$ függvények halmaza, melyekre

1/ f mérhető az $\mathcal{F}_b\times\mathcal{B}([a,b])$ -re,

2/ $f(t,\cdot)$ mint Ω -n értelmezett függvény mérhető $\mathcal{F}_t$ -re nézve minden rögzitett $t\in[a,b]$ esetén, és

3/ $$E\left(\int_a^b |f(t,\omega)|^2 dt\right) < \infty \qquad /88/$$

<u>7.2 Definició:</u> $\mathcal{P}_{[a,b]}$ azon $f:\Omega\times[a,b]\to R$ függvények halmaza, melyekre a 7.1 definició 1/ és 2/ feltétele mellett a

3a/ $$P\left\{\int_a^b |f(t,\omega)|^2 dt < \infty\right\} = 1 \qquad /89/$$

feltétel teljesül.

E két függvényosztály az melyekre a sztochasztikus integrált értelmezzük. Bevezetünk még egy osztály, melynek szerepe a hagyományos integrálelméletek lépcsősfüggvényeinek felel meg. Ez az osztály az egyszerü függvények osztálya lesz.

Képezzük a $[a, b]$ intervallum egy $a_i \leq a_{i+1}, i=0,\dots,m$ véges felosztását, és képezzük a

$$\chi_{[a_i, a_{i+1}]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a_i \leq t \leq a_{i+1}, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad /90/$$

$i=0,1,\dots,m-1$ függvénysereget.

Legyenek $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ Ω-n értelmezett négyzetesen integrálható függvények, és legyen φ_i mérhető az $\mathcal{F}_{a_i}$ -re nézve $i=0,1,2,\dots$ esetén.

Egyszerü függvényen az olyan $\mathfrak{M}_{[a,b]}$ -beli f függvényeket értünk, melyek felirhatók

$$f(t,\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{[a_i, a_{i+1}]}(t) \cdot \varphi_i(\omega) \qquad /91/$$

alakban ahol természetesen a felosztás is és a φ_i függvények is f -től függenek.

Érvényes az alábbi tétel:

<u>7.1 Tétel:</u> Az egyszerü függvények mindenütt sürüek -ben az $\mathfrak{M}_{[a,b]}$ - ben az

$$E\left(\int_a^b f^2(t,\omega)\,dt\right)^{1/2} =: \|f\|, \; f \in \mathfrak{M}_{[a,b]} \qquad /92/$$

normával.

A sztochasztikus integrált először egyszerü függvényekre definiáljuk:

$$I_t(f) = \int_a^t f\,dw := \sum_{0 \le a_{i+1} \le t} \varphi_i \cdot (w_{a_{i+1}} - w_{a_i}) + \varphi_{i(t)}(w_t - w_{a_{i(t)}}) \qquad /93/$$

ahol $\quad i(t) = \max\{ i+1 \mid a_{i+1} \le t \}$

Ha már most tekintetbe vesszük a /87/ formula alapján, hogy $b \ge t \ge t' \ge a$ esetén $E((w_t - w_{t'})^2) = t - t'$ és azt, hogy a w_t folyamat független növekményü, akkor az $I_t(f)$ valószinüségi változónk négyzetének várható értékét az alábbi úton számithatjuk ki:

$$E\left(\left(\int_a^t f\,dw\right)^2\right) = E\left(\int_a^t f^2\,dt\right), \qquad /94/$$

sőt a függetlenség figyelembevételéve a

$$E\left(\left(\int_a^t f\,dw\right) \cdot \int_a^{t'} g\,dw\right) = E\left(\int_a^{t \wedge t'} f \cdot g\,dt\right) \qquad /95/$$

formula érvényes, ahol $\quad t \wedge t' = \min(t, t')$.

A /94/ formula azt mutatja, hogy az

$$f \longrightarrow I_b(f) \qquad /96/$$

leképezés megtartja a /92/-vel definiált normát ezért egyértelmüen kiterjeszthető az egész $\mathcal{M}_{[a,b]}$ -re. Belátható, hogy a /94/ ill. /95/ formulák érvényben maradnak, ha

$$I_t(f) = I_b(f \cdot \chi_{[a,t]}) \qquad /97/$$

$\mathcal{P}_{[a,b]}$ -beli függvényeket pedig mértékben approximálhatunk $\mathcal{M}_{[a,b]}$ beliekkel úgy, hogy az $\mathcal{M}_{[a,b]}$ -beli integrálok is mértékben konvergensek lesznek.

A /95/ mellett az igy definiált sztochasztikus integrál rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1/ $E(I_t(f)) = 0$, $t \in [a,b]$, $f \in \mathcal{M}_{[a,b]}$.

2/ $E(I_t(f) \mid \mathcal{F}_s) = I_s(f)$, $a \le s \le t \le b$.

3/ $\int_a^{\tau} f\,dW = \int_a^b f \cdot \chi_{[a,\tau]}(\omega)\,dW$, ahol τ Markov pont.

4/ Az $I_t(f)$ folyamat trajektóriái 1 valószinüséggel folytonosak.

Ha a legsimább $f \equiv 1$ függvényt vesszük az integrandusba, az $I_t(1) = W_t$. E folyamatról tudjuk, hogy nem differenciálható, de még mint $t \to L_2(\Omega)$ görbe, sem differenciálható, legalább is hagyományos értelemben /Ugyanis - mint ez a fentiek következménye, $\|I_{t+h}(1) - I_t(1)\| = \sqrt{h}$, ami ellentmond az I_t differenciálhatóságának/. Ezért az ilyen folyamatok megadásánál differenciálegyenlet helyett a folyamat differenciálját irjuk fel:

$$d\xi_t = f(t,\omega)\,dW_t(\omega). \qquad /98/$$

A sztochasztikus integrál segitségével definiálunk egy fontos folyamatosztályt, az Ito-folyamatok osztályát:

$$d\eta_t = f(t,\omega)\,dt + g(t,\omega)\,dW_t \qquad /99/$$

ahol $P\{\int_a^b |f(t,\omega)|\,dt < \infty\} = 1$, $g(t,\omega) \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, és $f(t,\omega)$ mérhető t rögzitése mellett $\mathcal{F}_t$ -re minden $t \in [a,b]$ esetén.

A bevezetett folyamatosztály jelentőségét könnyen megérthetjük az alábbi egyszerü példán:

Ha tekintjük a W_t fenti Wiener folyamatot, képezhetjük ennek négyzetét, ami egy sztochasztikus folyamat lesz és

$$d w_t^2 = dt + 2 w_t \, dw_t \qquad /100/$$

lesz a differenciálja /ld. pl. [1]/. Ez azt mutatja, hogy az Ito integrállal nyert folyamatok nem lineáris differenciálható leképezésekkel szemben nem alkotnak zárt osztályt. A /99/-el definiált folyamatok osztálya azonban már zárt az ilyen leképezésekkel szemben, mint ezt vektorfolyamatokra kimondjuk.

Legyenek a $\{W_i(t)\}_{i=1}^{k}$, $t \in [a,b]$ skalár értékü Wiener folyamatok és $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ a szokásos monoton növekedő σ-algebra család. Tegyük fel továbbá, hogy minden $t\in[a,b]$ -re a $W_i(t)$ valószinüségi változók $\mathcal{F}_t$ mérhetők, és a $W_i(t+h) - W_i(t)$ növekmények függetlenek az $\mathcal{F}_t$ eseményeitől $i=1,2,\dots,k$ -ra.

Legyen $f_i(t,\omega) : \Omega \times [a,b] \to R^m$, $i=1,2,\dots,k$ olyan függvények, melynek minden komponense $\mathcal{P}_{[a,b]}$ -beli. Ekkor az f_i függvény $\int_a^b f_i(t)\,dW_i(t)$ sztochasztikus integráljai komponensenként képezve előállithatók $i=1,2,\dots,k$ mellett, és felirhatjuk a

$$d\xi_t = a(t)dt + \sum_{i=1}^{k} f_i(t)\,dW_i(t) \qquad /101/$$

Ito differenciált, ahol $a(t,\omega)$ olyan m-dimenziós függvény az $\Omega\times[a,b]$ -n, melynek minden komponense teljesiti az

$$P\{ \int_a^b |a(t,\omega)|\,dt < \infty\} = 1 \qquad /102/$$

feltételt és $t\in[a,b]$ mellett az $a(t,\omega)$ az ω változójában $\mathcal{F}_t$ -mérhető.

Legyen $U(t,x): [a,b] \times R^m \rightarrow R^m$ függvény. Ha az $U(t,x)$ függvény folytonos és a

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,x), \ \frac{\partial}{\partial x_i} U(t,x), \ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U(t,x), \ i,j = 1,2,\dots m$$

parciális deriváltak folytonosak, a $\{\xi_t\}_{t\in[a,b]}$ folyamat pedig a /101/ sztochasztikus differenciállal adható meg, akkor az $\eta_t = U(t,\xi_t)$ folyamatra a következő sztochasztikus differenciál irható fel:

$$d\eta_t = \Big[\frac{\partial U(t,\xi_t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} U(t,\xi_t)\, a_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U(t,\xi_t) \cdot f_i^l(t) \cdot f_j^l(t) \Big] dt + \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial U}{\partial x_j} f_j^i(t) \Big) dw(t) \qquad /103/$$

Ebből azonban

$$\lim_{t' \searrow t} \frac{E(\eta_{t'} | F_t) - \eta_t}{t' - t} = \frac{\partial U(t,\xi_t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} U(t,\xi_t)\, a_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U(t,\xi_t)\, f_i^l(t)\, f_j^l(t) \qquad /104/$$

következik.

A /101/-el megadott Ito folyamatra kiszámithatjuk az alábbi határértékeket /ld. /79/, /80/ határértékeket a differenciál folyamatokra/.

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(\xi_{t+h} | F_t) - \xi_t}{h} = a(t,\omega) \qquad /105/$$

illetve

$$\lim_{h\to 0} \frac{E((\xi_{t+h} - \xi_t)^T (\xi_{t+h} - \xi_t) | F_t)}{h} = B(t,\omega)\, B(t,\omega)^T$$

ahol az elsőt a /104/ alapján irhatjuk fel, mig a másodiknál felhasználtuk az Ito integrálok /95/ tulajdonságát, és a $B(t,\omega)$ mátrix az $f_i, i=1,2,\dots,k$; m-dimenziós oszlopvektorok egymás mellé rendeléséből adódik.

A /105/ formulával egyúttal rátérhetünk a diffuziós és Markov folyamatok előző pont végén felvetett modellezési problémájára. Ha ugyanis a ξ_t Ito folyamat történetesen Markov, vagy diffuziós folyamat, akkor mint ez a függelék 1. és 6. pontjából kiderül, a /105/ jobb oldalai felirhatók

$$a(t,\omega) = \tilde{a}(t, \xi_t) \qquad /106/$$

illetve

$$B(t,\omega)B(t,\omega)^T = \sigma(t, \xi_t)$$

alakban, az $\mathcal{F}_t$ feltételes várható érték tulajdonságai miatt, ahol

$$\tilde{a} : R \times R^m \to R^m,$$
$$\sigma : R \times R^m \to R^{m^2} \qquad /107/$$

adott függvények.

A /106/ illetve /107/ alapján tehát azt kaptuk, hogy Markov illetve diffuziós folyamatok modelljei olyan Ito folyamatok lehetnek, melyek felirhatók

$$d\xi_t = \tilde{a}(t, \xi_t)dt + \tilde{B}(t, \xi_t)\, dW_t \qquad /108/$$

alakban /itt $W_t = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_k(t) \end{pmatrix}$ vektor folyamat/. Tekintetbe véve, hogy $\mathcal{B}=0$ esetén a /108/ egy közönséges differenciálegyenletbe megy át, /108/-at sztochasztikus differenciálegyenletnek nevezzük, és ez az egyenlet már analóg az /1/ differenciálegyenlettel.

Ahogy az Ito folyamatok trajektóriáit, és felépitését konstruktivan kezelhetjük az Ito integrálokkal a /108/ egyenletre a közönséges differenciálegyenletekéhez hasonlóan iterációs módszerekkel nyerhetünk megoldásokat, és ez az ilyen alakban felirható Markov és diffuziós folyamatok egy osztályára igen jól kezelhető konstruktiv előállitást jelent bizonyitva egyúttal, hogy ezek tényleg Wiener folyamat és differenciálható folyamat /108/ tipusú kombinációjával modellezhetők. Pontosan, ezt az alábbi tétel mondja ki:

<u>7.2 Tétel</u>

Legyenek $a(t,x), b_1(t,x), \dots, b_m(t,x): [a,b]\times R^m \to R^m$ Borel-mérhető függvények, legyen $\sigma(t,x)$ az a mátrix, amelyet a $b_i(t,x)$, $i=1,2,\dots,m$ oszlopvektoroknak egymás mellé irásával kapunk és $w(t)=(w_1(t),\dots,w_m(t))$ Wiener folyamat.

Ha létezik olyan k, hogy

$$\|a(t,x)\|^2+\sum_{k=1}^{m}\|b_k(t,x)\|^2\le k\cdot(1+\|x\|^2)$$

és

$$\|a(t,x)-a(t,y)\|+\sum_{k=1}^{m}\|b_k(t,x)-b_k(t,y)\|\le k\cdot\|x-y\|$$

minden $x,y\in R^m$ -re, akkor a

$$\xi_t=\xi_{t_0}+\int_{t_0}^{t}a(s,\xi_s)\,ds+\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}b_k(s,\xi_s)\,dw_k(s)$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek létezik egy valószinüséggel folytonos megoldása, ami a sztochasztikus ekvivalencia erejéig egyértelmü. Ez a ξ_t megoldás Markov folyamat, átmenet valószinüségeire

$$P(t,x,s,A) = P(\xi_{t,x}(s) \in A) \quad , t < s, \quad A \in \mathcal{B}(R^n)$$

ahol $\xi_{t,x}(s)$ a következő differenciálegyenlet megoldása:

$$\xi_{t,x}(s) = x + \int_t^s a(u, \xi_{t,x}(u))\, du +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_t^s b_k(u, \xi_{t,x}(u))\, d w_k(u) .$$

Ha az $a(t,x)$ és $b_k(t,x)$ függvények t szerint folytonosak, akkor ξ_t diffuziós folyamat lesz a $a(t,x)$ átmenet vektorral és a

$$B(t,x) = \sigma'(t,x)\, \sigma(t,x)$$

diffuziós mátrix-szal.

<u>7.1 Megjegyzés</u>

A 7.2 tétel szerint /103/ η_t megoldása diffuziós folyamat, aminek Q_t^* erős infinitezimális generátorát /104/ alapján lehet felirni.

<u>7.2 Megjegyzés:</u> A 7.2 tétel kimondja, hogy ha az a és b_i függvények teljesitik a tétel feltételeit, akkor minden olyan valószinüségi mezőn, ahol W m-dimenziós Wiener folyamat létezik, ott /106/-nak /és igy /105/-nek is/ eleget tevő Ito /adott esetben Markov ill. diffuziós folyamat is létezik/. A /108/ egyenletre vonatkozó ilyen megoldást erős megoldásnak nevezzük.

Ha a /108/ egyenlet a, b_i függvényeihez található olyan $\{\Omega, \mathcal{S}, P\}$ valószinüségi mező, egy $\{w_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in R^1}$

m-dimenziós Wiener folyamattal és egy ξ_t Ito folyamattal, hogy /108/ ezekkel teljesül, ezt a /108/ gyenge megoldásának nevezzük.

Azt a tényt, hogy a /108/ egyenletnek a 7.2 tétel feltételeit nem teljesitő a és b_i függvények mellett is létezhet gyenge megoldása, az is sugallja, hogy mind a Fockker-Planck egyenletnek, mind pedig a a Kolmogorov egyenletnek /82/, /84/ létezhet megoldása ilyen esetekben. /A parciális differenciálegyenletek egzisztenciatételeit ezen összefoglalónkban nem érintettük./

8. MARTINGÁLOK

A Markov folyamatok, mint láttuk olyan $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ sztochasztikus folyamatok egy $\mathcal{F}_t$, $t\geq 0$ monoton növekedő σ-algebra családdal, melyre nézve egyrészt

1/ ξ_t mérhető $\mathcal{F}_t$ -re

2/ Tetszőleges $\varphi: R^n \to R^m$, $n,m\geq 1$ korlátos mérhető függvényre teljesül az

$$E(\varphi(\xi_{t'})|\mathcal{F}_t) = \psi(\xi_t) \quad , \quad t\leq t' \qquad /109/$$

felirás /ld. /11//.

A 2/-ben tehát az az érdekes, hogy az $E(\varphi(\xi_{t'})|\mathcal{F}_t)$ valószinüségi változó előállitható a ξ_t függvényeként.

Martingálok esetében szintén a feltételes várható értékkel mint valószinüségi változóval szemben támasztunk követelményeket, de a 2/-nél jóval gyengébbet.

Legyen $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton növő σ -algebracsalád.

8.1 Definició: Az $\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{N}$ sorozatot szupermartingálnak illetve szubmartingálnak nevezzük, ha

$$E(|\xi_n|) < \infty, \quad n=1,2,\dots N$$

és az

$$E(\xi_n|\mathcal{F}_m) \leq \xi_m \quad , \quad n\geq m$$

illetve az

$$E(\xi_n/\mathcal{F}_m) \geq \xi_m \quad , \quad n\geq 0$$

egyenlőtlenségek 1 valószinüséggel érvényesek.

8.1 Megjegyzés: Ha $\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{N}$ egyszerre szuper- és szubmartingál is, akkor $\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{N}$ martingál.

8.2 Megjegyzés: Hogy a 8.1 definició feltétele tényleg gyengébb, mint a 2/ ezt az mutatja, hogy az $E(\xi_n | \mathcal{F}_m)$ -től nem követeltük meg azt sem, hogy ξ_m függvénye legyen. A 8.1 megjegyzésnél ugyan megkapjuk, hogy $E(\xi_n | \mathcal{F}_m) = \xi_m$ de lehet példát adni olyan martingálra, mely nem Markov folyamat.

8.1 Tétel: Legyen $\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{N}$ szubmartingál. Akkor tetszőleges $\lambda > 0$ -ra

$$P\{\max_{1 \le n \le N} \xi_n \ge \lambda\} \le \frac{1}{\lambda} \int_{\{\max_{1 \le n \le N} \xi_n \ge \lambda\}} \xi_N \, dP = \frac{1}{\lambda} E(\xi_N^+),$$

$$\lambda \cdot P\{\min_{1 \le n \le N} \xi_n \le -\lambda\} \le -E(\xi_1) + \int_{\{\min_{1 \le n \le N} \xi_n \le \lambda\}} \xi_N \, dP .$$

8.2 Tétel: Legyen $\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ olyan szubmartingál, hogy

$$\sup_n E(\xi_n^+) < \infty$$

Akkor 1 valószinüséggel létezik a $\lim_{n\to\infty} \xi_n \ (= \xi_\infty)$ és

$$E(\xi_\infty^+) < \infty .$$

Időben folytonos esetre a fentiek a következőképpen módosulnak.

Tekintsük az $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in R^+}$ monoton növő σ-algebra családot.

8.2 Definició: A $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in R^+}$ családot jobbról folytonos szupermartingálnak nevezzük, ha $E(|\xi_t|) < \infty$ és $E(\xi_{t'}|\mathcal{F}_t) \leq \xi_t$, $t' \geq t$ valamint ha

1/ a ξ_t trajektóriák 1 valószinüséggel jobbról folytonosak,

2/ az $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ σ-algebracsalád jobbról folytonos, azaz

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \qquad \text{minden } t \geq 0 \text{ -ra.}$$

<u>8.3 Megjegyzés:</u> Szubmartingálra természetesen a 8.2-vel teljesen analóg definició adható meg.

<u>8.3 Tétel:</u> Legyen $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$, $T\in R^+$ jobbról folytonos szubmartingál. Akkor

$$P\{\sup_{t\leq T} \xi_t \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{\sup_{t\leq T} \xi_t \geq \lambda\}} \xi_T \, dP \leq \frac{1}{\lambda} \cdot E(\xi_T^+),$$

$$\lambda \cdot P\{\inf_{t\leq T} \xi_t \leq -\lambda\} \leq -E(\xi_0) + \int_{\{\inf_{t\leq T} \xi_t \leq -\lambda\}} \xi_T \, dP .$$

<u>8.4 Tétel:</u> Ha $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in R^+}$ olyan jobbról folytonos szubmartingál, hogy

$$\sup_{t\geq 0} E(\xi_t^+) < \infty$$

akkor $\lim_{t\to\infty} \xi_t \ (= \xi_\infty)$ 1 valószinüséggel létezik, és

$$E(\xi_\infty^+) < \infty .$$

IRODALOMJEGYZÉK

[1] J.L. Doob: Stochastic Processes
New York - John Wiley, 1953.

[2] I.I. Gihman - A.V. Szkorohod: Vvegyenyie v teoriju szlucsajnüh processzov.
NAUKA, Moszkva, 1965.

[3] I.I. Gihman - A.V. Szkorohod: Sztochaszticseszkie differencialnüe uravnyenyija.
NAUKOVA DUMKA, Kiev, 1968.

[4] R.E. Haszminszkij - M.B. Nevelson: Sztochaszticseszkaja approximacija i rekurrentnoe ocenyivanyie.
NAUKA, Moszkva, 1972.

[5] H.J. Kushner: Converse theorem for stochastic Ljapunov functions
SIAM J. Control 5, No 2 /1967/.

[6] H.J. Kushner: Stochastic Stability and Control
Academic Press, New York - London. 1967.

[7] R.S. Lipcer - A.N. Siriaev: Sztatisztika szlucsajnüh processzov.
NAUKA, 1974.

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1980-BAN JELENTEK MEG:

101/1980	Gerencsér László - Hangos Katalin: Diszkrét lineáris sztochasztikus rendszerek önhangoló szabályozása
102/1980	Pásztorné Varga Katalin: Rekurziv eljárás
103/1980	Gerencsér Piroska - Szép Endre - Zilahy Ferenc Marton Zsolt: Robotmegfogók adaptivitása I.
104/1980	Knuth Előd - Radó Péter - Tóth Árpád: A SDLA előzetes ismertetése
105/1980	E. Knuth - P. Radó - Á. Tóth: Preliminary description of SDLA
106/1980	Prékopa András: Sztochasztikus programozási modellek és alkalmazásuk
107/1980	Kelle Péter: Megbizhatósági készletmodellek és alkalmazásuk
108/1980	Almásy Gedeon: Mérlegegyenletek és mérési hibák
109/1980	Békéssy A. - Demetrovics J. - Gyepesi Gy.: Relációs adatbázis logikai szintü vizsgálata funkcionális függőségek szempontjából
110/1980	Gaál A. - Soltész J. - Ruda M. - Ratkó I.: Tanulmányok a statisztikai adatfeldolgozásról
111/1980	Benedikt Szvetlána: Nem ismételhető döntéshozatal analizise kockázattal járó esetekben
112/1980	Verebély Pál: Többprocesszoros, osztott intelligenciáju grafikus rendszerek tervezési és megvalósitási kérdései
113/1980	V. Visegrádi Téli Iskola

[8] M. Loeve: Probability theory, II.
Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1977.

[9] A.D. Vencel: Kursz teorii szlucsajnüh processzov.
NAUKA, Moszkva, 1975.

[10] P. Eykhoff: System Identification
J. Wiley, London New York, 1974.

[11] L. Ljung: On positive Real Transfer Functions and
the Convergence of some Recursive Schemes.
IEEE. Trans. Aut. Control, 22. 599-551.

114/1980 Demetrovics János: Relációs adatmodell logikai és strukturális vizsgálata

115/1980 Gergely József: Program package for sparse matrices

1981-BEN JELENTEK MEG:

116/1981 Siegler András: Egy 6 szabadságfoku antropomorf manipulátor kinematikája és számitógépes vezérlése

117/181 Knuth Előd - Radó Péter: Principles of Computer Aided System Description

118/1981 Demetrovics János - Gyepesi György: Általános függések és lekérdezéssel kapcsolatos algoritmusok relációs adatmodellekben

119/1981 Sztanó Tamás: REAL-TIME programrendszerek eseményvezérelt szervezése

120/1981 Szentgyörgyi Zsuzsa: A számitástechnika müszaki fejlődése és társadalmi hatásai

121/1981 Vicsek Tamásné (Strehó Mária): Vizsgálatok a kezdeti érték problémák numerikus megoldásával kapcsalatban